第61卷第2期
2021年3月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol. 61, No. 2
Mar. 2021

文章编号：1000-8608(2021)02-0118-11

一种超级梁单元桁架式臂架结构强度荷载计算

徐金帅[1]， 齐朝晖*[1]， 高凌翀[2]， 卓英鹏[1]， 李　强[3]

(1.大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室，辽宁 大连　116024；
2.慕尼黑工业大学 物流搬运与起重研究所，德国 加尔兴　85748；
3.太原重工股份有限公司，山西 太原　030021)

摘要： 桁架式臂架结构强度承载能力计算是臂架型起重机核心计算之一.以单个臂节作为一个子结构，将其内部自由度凝聚到臂节端面，基于臂节端面刚性假设，将边界自由度进一步凝聚到臂节端面形心，臂节自重离散到形心节点上，形成一种考虑重力的超级梁单元.基于共旋坐标法，建立每个臂节的随动坐标系，可以准确计算计及大长度臂架几何非线性效应的单元应力.通过建立臂架的节点力平衡方程，得到梁单元节点位移与截面转角，计算臂架的结构强度.基于数值插值方法，提出一种快速搜索强度荷载的方法，实现对臂架强度荷载的快速搜索，得到臂架强度的承载能力.通过数值算例，说明该方法在快速计算桁架式臂架结构强度承载能力方面有着较高的效率与精度.

关键词： 桁架式臂架；超级梁单元；几何非线性；自由度凝聚；强度荷载搜索；插值方法

中图分类号： O342　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.7511/dllgxb202102002

0　引　言

以桁架式臂节组装臂架作为主承载结构的臂架型起重机主要有履带式起重机、桅杆式起重机、塔式起重机等.臂架结构的承载能力是起重机的关键指标之一，主要由臂架结构强度、臂架稳定性两方面确定[1].臂架长度不断增加，在承载后有明显的变形，体现出几何非线性效应[2]，文献[3-5]在臂架稳定性计算方面做了大量研究.桁架式臂架具有组合规则、计算工况多的特点，工程技术人员通常依据现有国家规范的解析计算以及采用商用有限元软件建立相应的计算模型进行计算[6].随着起重机吨位的不断增加，臂架长度加长，采用这类计算方式存在明显的不足：(1)基于国家规范的结构应力解析计算方法[7]，在具有几何非线性效应的臂架计算中，通常采用带有经验特点的放大系数法对线性结构应力进行放大，虽然计算效率高，但所得到的结果往往偏于危险.(2)应用商用有限元软件计算时，由于臂架计算工况多以及结构自由度大，在长臂架的几何非线性计算中，计算效率低，同时还需要通过试算方式结合人为判断确定结构强度承载能力.如何满足桁架式臂架在工程中使用安全的前提下提高设计计算效率，成为一个非常实际的问题.

工程中的桁架式臂架，虽然承载后整体上存在较大变形，但在每个臂节结构中，仍属于小变形情况，因此，可根据臂架组合将其划分为多个子结构.子结构法能够大幅度削减所要求解的平衡方程的维数[8]，提高计算效率，在大量工程中一直被广泛应用[9-11].工程中针对以梁杆单元组成的空间框架结构的几何非线性计算，构造一种新的非线性单元也是很多研究人员专注的一个研究方向[12-14]，并且在一些框架结构中得到了应用.而应用共旋坐标法[15]解决这类工程问题相对于应用全量拉格朗日方法、增量拉格朗日方法以及二者

收稿日期： 2020-07-09；　**修回日期：** 2021-01-03.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11872137,91748203)；中德合作基金资助项目(11761131005).
作者简介： 徐金帅(1982-)，男，博士生，E-mail：xujinshuai@mail.dlut.edu.cn；齐朝晖*(1964-)，男，博士，教授，博士生导师，E-mail：zhaohuiq@dlut.edu.cn.

混用的混合法体现出简单、高效的特点，同时并不需要构造新的非线性单元[16]，可以充分利用线性有限元所积累的大量成果. 在考虑结构几何非线性效应的前提下，对于结构强度决定的承载能力进行快速搜索也是提高计算效率的途径之一，采用一维搜索中的黄金分割法[17]虽然能够进行其承载能力的搜索，但由于搜索区间的长度缩短比率为常数，其收敛速度较慢[18].

因此针对组合规则多、长度多变的桁架式臂架，本文在考虑臂节重力影响的基础上，基于静力凝聚法，针对每个臂节建立可参数化的两节点超级梁单元，以实现臂架参数化的快速建模. 基于共旋坐标法考虑臂架的几何非线性效应，在得到单元的节点力之后，快速计算臂架的结构应力，同时提出一种臂架结构强度承载能力快速搜索方法，对于提高桁架式臂架起重机的计算效率以及结构安全性研究提供参考.

1　桁架式臂架的特点

桁架式臂架结构均为格构式，由于安装、运输等参数尺寸要符合相关国家运输标准要求，需拆分为多个独立的臂节，其臂节的组合可根据相应臂架的设计参数进行合理组装，形成不同长度参数的臂架，如图 1 所示.

图 1　桁架式臂架起重机

Fig. 1　Cranes with lattice boom

臂架主结构由多根型材组成，称之为弦杆，弦杆之间通过销轴或者焊接形式的缀条连接，缀条称之为腹杆. 这种结构形式在一定的空间尺寸上具有更好的抗弯与抗扭能力，能够承载更大的荷载. 臂节一般可以分为底节、不同长度的中间节、变截面节、臂头等部件，如图 2 所示.

在确定臂节种类之后，不同长度的臂架组合通过配置不同臂节实现. 因此，桁架式臂架组合只

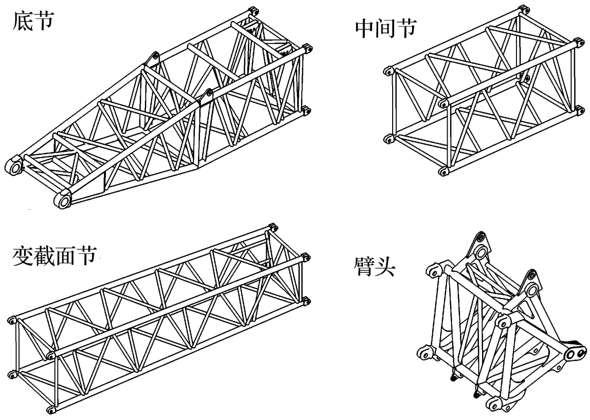


图 2　臂节的基本形式

Fig. 2　Basic sections of boom

需要建立少量参数化的臂节，就可以快速实现不同臂节参数与臂架长度的组合. 底节局部与臂头为刚度大的板梁组合结构，计算中作为刚体考虑. 很多桁架式臂架起重机的臂架具有较大范围的工作角度，以单主臂为例，一般具有与水平面 30°到 85°夹角的连续工作范围，如图 3 所示. 以带有超起桅杆结构的履带起重机为例，超起桅杆有 3 种工作角度，主臂以 2°为离散间隔计算点，需要计算的离散点的数量接近 900 个，表 1 为太原重工 750 t 履带起重机主臂的组合表，也体现出需要计算大量臂架工况，因而一种快速的建模与计算方法对于桁架式臂架的计算有重要意义.

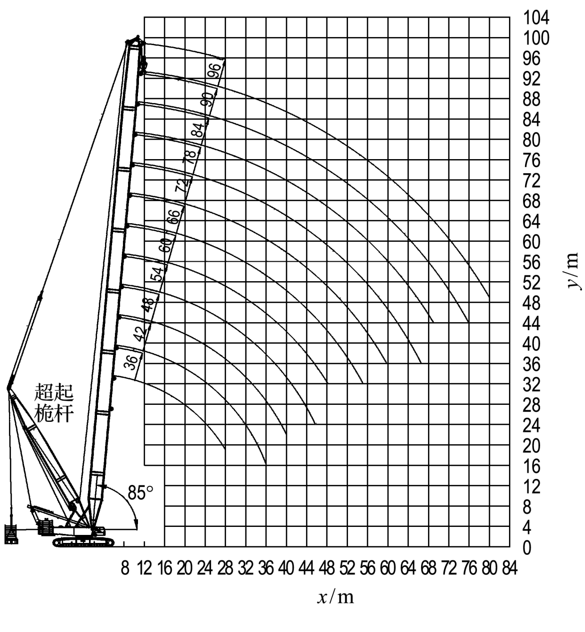


图 3　履带起重机超起型主臂

Fig. 3　Main boom with super-lift of crawler crane

表1 臂架组合参数

Tab.1 Boom combination parameters

臂架长度/m	臂节组合
36	B+L1+L2+T+H
42	B+L1+L2+L3+T+H
⋮	⋮
90	B+L1+4×L2+T+H
96	B+L1+4×L2+L3+T+H

注:底节为B,中间节1为L1,中间节2为L2,中间节3为L3,变截面节为T,臂头为H.

2 臂节子结构坐标系

建立每个臂节的臂节子结构坐标系(后文均称为臂节坐标系),如图4所示,可以清晰地描述单个臂节内部单元在臂节坐标系的节点位移与截面转角,同时方便表达臂节坐标系相对于总体坐标系的大转动.单个臂节左右端面形心在总体坐标系的矢径分别为$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$.

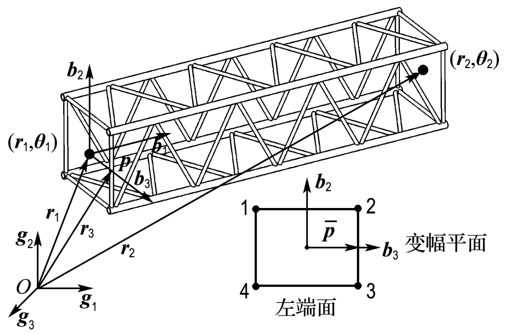


图4 臂节子结构坐标系

Fig.4 Coordinate system of boom section substructure

在臂节子结构左端面,选择臂节一侧变幅平面内的两个点中心作为辅助参考点p,臂节坐标系可以按照如下原则建立:

$$\boldsymbol{b}_1=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{\|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\|},\ \boldsymbol{b}_2=\frac{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{b}_1\|},\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2 \quad (1)$$

臂节坐标系相对于总体坐标系的参数转换矩阵(坐标系基矢量为列向量)为

$$\boldsymbol{A}_{\rm gs}=(\boldsymbol{b}_1\quad \boldsymbol{b}_2\quad \boldsymbol{b}_3) \quad (2)$$

臂节坐标系相对于总体坐标系的转动角速度为$\boldsymbol{\omega}_{\rm gs}$,根据臂节坐标系的建立原则,臂节左端面形心在臂节坐标系内的位移$\bar{\boldsymbol{u}}_1=\boldsymbol{0}$,臂节右端面形心在臂节坐标系下的位移$\bar{\boldsymbol{u}}_2$可以表达为

$$\bar{\boldsymbol{u}}_2=\boldsymbol{A}_{\rm gs}^{\rm T}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)-\bar{\boldsymbol{r}}_2 \quad (3)$$

式中:$\bar{\boldsymbol{r}}_2$为臂节右端面形心初始状态下在臂节坐标系中的矢径.

臂节右端面形心位移在臂节坐标系中的速度:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_2=\boldsymbol{A}_{\rm gs}^{\rm T}(\dot{\boldsymbol{r}}_2-\dot{\boldsymbol{r}}_1+(\tilde{\boldsymbol{r}}_2-\tilde{\boldsymbol{r}}_1)\boldsymbol{\omega}_{\rm gs}) \quad (4)$$

式中:$\tilde{\boldsymbol{r}}_1$为矢量$\boldsymbol{r}_1$对应的反对称阵.统一约定,对于任意三维列向量,增加波浪线表达矢量的反对称阵:

$$\tilde{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix} \quad (5)$$

辅助参考点在臂节坐标系下的速度:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{A}_{\rm gs}^{\rm T}(\tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\omega}_{\rm gs}-\tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\omega}_1) \quad (6)$$

式中:$\boldsymbol{\omega}_1$为左端面在总体坐标系上转动角速度;$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$,为点$p$在总体坐标系中的矢径.

结合臂节坐标系的定义,$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$在$\boldsymbol{b}_2$与$\boldsymbol{b}_3$轴上分量为$\boldsymbol{0}$,矢径$\boldsymbol{p}$在$\boldsymbol{b}_2$轴上分量为$\boldsymbol{0}$,那么位移协调条件为

$$\boldsymbol{b}_2\cdot(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}_3\cdot(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0} \quad (7)$$

由式(7)可以得到速度协调方程:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{b}_2^{\rm T}(\dot{\boldsymbol{r}}_2-\dot{\boldsymbol{r}}_1)-(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{b}}_2\boldsymbol{\omega}_{\rm gs}=\boldsymbol{0}\\&\boldsymbol{b}_3^{\rm T}(\dot{\boldsymbol{r}}_2-\dot{\boldsymbol{r}}_1)-(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{b}}_3\boldsymbol{\omega}_{\rm gs}=\boldsymbol{0}\\&\boldsymbol{p}^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{b}}_2\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{p}^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{b}}_2\boldsymbol{\omega}_{\rm gs}=\boldsymbol{0}\end{aligned} \quad (8)$$

根据臂节坐标系建立原则:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=k_1\boldsymbol{b}_1\\&\boldsymbol{p}=k_3\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_3\end{aligned} \quad (9)$$

其中k_1、k_2、k_2为常数,将式(9)代入式(8),可以得到

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{b}_2^{\rm T}(\dot{\boldsymbol{r}}_2-\dot{\boldsymbol{r}}_1)-k_1\boldsymbol{b}_3^{\rm T}\boldsymbol{\omega}_{\rm gs}=\boldsymbol{0}\\&\boldsymbol{b}_3^{\rm T}(\dot{\boldsymbol{r}}_2-\dot{\boldsymbol{r}}_1)+k_1\boldsymbol{b}_2^{\rm T}\boldsymbol{\omega}_{\rm gs}=\boldsymbol{0}\\&\boldsymbol{p}^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{b}}_2\boldsymbol{\omega}_1-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{b}_2^{\rm T}(\dot{\boldsymbol{r}}_2-\dot{\boldsymbol{r}}_1)+k_2\boldsymbol{b}_1^{\rm T}\boldsymbol{\omega}_{\rm gs}=\boldsymbol{0}\end{aligned} \quad (10)$$

根据式(10)可以得到臂节坐标系的角速度$\boldsymbol{\omega}_{\rm gs}$:

$$\boldsymbol{\omega}_{\rm gs}\triangleq\boldsymbol{T}_r(\dot{\boldsymbol{r}}_2-\dot{\boldsymbol{r}}_1)+\boldsymbol{T}_{\omega}\boldsymbol{\omega}_1 \quad (11)$$

其中

$$\boldsymbol{T}_r=\frac{1}{k_2k_1}\boldsymbol{p}\boldsymbol{b}_2^{\rm T}-\frac{1}{k_1}\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3^{\rm T},\ \boldsymbol{T}_{\omega}=\frac{1}{k_2}\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{p}^{\rm T}\tilde{\boldsymbol{b}}_2 \quad (12)$$

3 考虑重力离散的臂节超级梁单元

桁架式臂架中的大量臂节内部节点除重力作用外,不承受外部荷载,而且重力加速度方向在总体坐标系中的方向保持不变,从而可采用静力凝聚的方法[8],未知量为臂节两端节点自由度,内部自由度由两端节点自由度表达,从而实现自由度的凝聚,达到降低计算自由度数量的目的.

3.1　考虑重力离散的臂节内部自由度凝聚

采用文献[8]中对于子结构自由度凝聚的方法，可以总结为

(1)在重力影响不能忽略的情况下，可以将重力离散到所有节点上，得到每个单元的重力离散系数矩阵，针对整个结构进行重力离散系数组装；

(2)对于子结构的边界节点、内部自由节点的受力，在进行整体分析之前，虽然 3 种外力是未知的，但是可以确定其处于平衡状态，建立子结构的平衡方程；

(3)在消除结构刚体位移的前提下，内部节点自由度总可以用边界节点自由度表达.

图 5 为桁架式臂节的节点分类图，单个臂节的等效刚度矩阵为

$$\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{K}}_{11} & \bar{\boldsymbol{K}}_{12}\\ \bar{\boldsymbol{K}}_{21} & \bar{\boldsymbol{K}}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}_1\\ \bar{\boldsymbol{u}}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{F}}\\ \bar{\boldsymbol{F}}_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{V}}_1\\ \bar{\boldsymbol{V}}_2\end{pmatrix}\bar{\boldsymbol{g}} \tag{13}$$

式中：$\bar{\boldsymbol{u}}_1$、$\bar{\boldsymbol{u}}_2$ 为臂节边界节点集在臂节坐标系中的位移，$\bar{\boldsymbol{g}}$为臂节坐标系中重力加速度；其他如下.

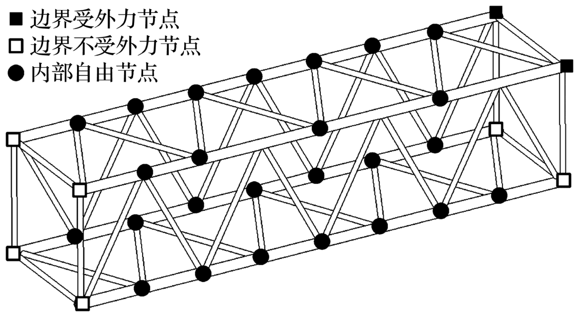


图 5　臂节子结构节点分类

Fig. 5　Node classification of boom section substructure

等效刚度阵中的子矩阵

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{K}}_{11}=\bar{\boldsymbol{k}}_{11}-\bar{\boldsymbol{k}}_{13}\bar{\boldsymbol{k}}_{33}^{-1}\bar{\boldsymbol{k}}_{31}\\&\bar{\boldsymbol{K}}_{21}=\bar{\boldsymbol{K}}_{12}=\bar{\boldsymbol{k}}_{12}-\bar{\boldsymbol{k}}_{13}\bar{\boldsymbol{k}}_{33}^{-1}\bar{\boldsymbol{k}}_{32}\\&\bar{\boldsymbol{K}}_{22}=\bar{\boldsymbol{k}}_{22}-\bar{\boldsymbol{k}}_{23}\bar{\boldsymbol{k}}_{33}^{-1}\bar{\boldsymbol{k}}_{32}\end{aligned} \tag{14}$$

重力离散系数矩阵

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{V}}_1=\bar{\boldsymbol{v}}_1-\bar{\boldsymbol{k}}_{13}\bar{\boldsymbol{k}}_{33}^{-1}\bar{\boldsymbol{v}}_3\\&\bar{\boldsymbol{V}}_2=\bar{\boldsymbol{v}}_2-\bar{\boldsymbol{k}}_{23}\bar{\boldsymbol{k}}_{33}^{-1}\bar{\boldsymbol{v}}_3\end{aligned} \tag{15}$$

其中，单个臂节刚度阵

$$\bar{\boldsymbol{k}}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{k}}_{11} & \bar{\boldsymbol{k}}_{12} & \bar{\boldsymbol{k}}_{13}\\ \bar{\boldsymbol{k}}_{21} & \bar{\boldsymbol{k}}_{22} & \bar{\boldsymbol{k}}_{23}\\ \bar{\boldsymbol{k}}_{31} & \bar{\boldsymbol{k}}_{32} & \bar{\boldsymbol{k}}_{33}\end{pmatrix} \tag{16}$$

单个臂节重力离散系数矩阵

$$\boldsymbol{v}=(\bar{\boldsymbol{v}}_1\quad \bar{\boldsymbol{v}}_2\quad \bar{\boldsymbol{v}}_3)^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

3.2　臂节的超级梁单元

臂节连接端部均有加强直腹杆等局部加强结构进行连接，刚度较大. 为提高求解的效率，假设臂节端面为刚性截面，进行第二次凝聚，将子结构端面节点的自由度用端面中心点的自由度表示，形成臂节两节点超级梁单元，如图 6 所示.

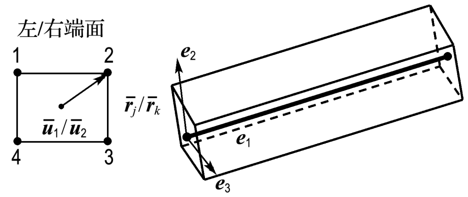


图 6　臂节超级梁单元示意图

Fig. 6　Super beam element diagram of boom section

对于在臂节子结构左右端面上任意一节点，其位移与转角可以表达为

$$(\bar{\boldsymbol{u}}_j\quad \bar{\boldsymbol{\theta}}_j\quad \bar{\boldsymbol{u}}_k\quad \bar{\boldsymbol{\theta}}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}_n(\bar{\boldsymbol{u}}_1\quad \bar{\boldsymbol{\theta}}_1\quad \bar{\boldsymbol{u}}_2\quad \bar{\boldsymbol{\theta}}_2)^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

节点参数转换矩阵

$$\boldsymbol{T}_n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & -\tilde{\bar{\boldsymbol{r}}}_j & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & -\tilde{\bar{\boldsymbol{r}}}_k\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix} \tag{19}$$

式中：$\bar{\boldsymbol{r}}_j$、$\bar{\boldsymbol{r}}_k$ 为臂节子结构左端面上节点相对于其端面形心的矢径.

根据式(19)以及臂节两端面边界节点数，可以组装得到边界节点参数与端面形心节点参数转换矩阵 $\boldsymbol{T}$，通过边界节点虚功率方程可以推导出超级梁单元等效刚度阵 $\boldsymbol{K}$ 与等效重力离散系数矩阵 $\boldsymbol{V}$.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{K}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}\,\boldsymbol{T}\\&\boldsymbol{V}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{V}}\end{aligned} \tag{20}$$

这样每个臂节作为一个子结构，通过对其自由度的凝聚，形成了具有两个节点的超级梁单元，但是却完整保留了整个臂节的几何与力学信息.

4　参数化的臂节建模

4.1　臂节的参数化模型

产品设计计算是一个不断反复迭代修正的过程，建立可参数化的计算模型，实现对模型参数的修改，快速生成新的计算模型，对工程起重机设计计算有着重要意义. 表 2 中以桁架式臂架的一个中间节为例，通过对表中臂节特征参数进行参数化设计，可以快速建立起对应的具有超级梁单元

特征的臂节结构.参数化臂节模型见图7.

表2　中间节参数

Tab.2　Middle section parameters

中间节长度/m	截面高/m	截面宽/m	弦杆外径/m	弦杆内径/m	回转平面内腹杆外径/m
12	2.6	2.8	0.219	0.179	0.114

回转平面内腹杆内径/m	变幅平面内腹杆外径/m	变幅平面内腹杆内径/m	单面腹杆布置根数	变幅平面内第一根腹杆走向
0.102	0.114	0.102	8	2

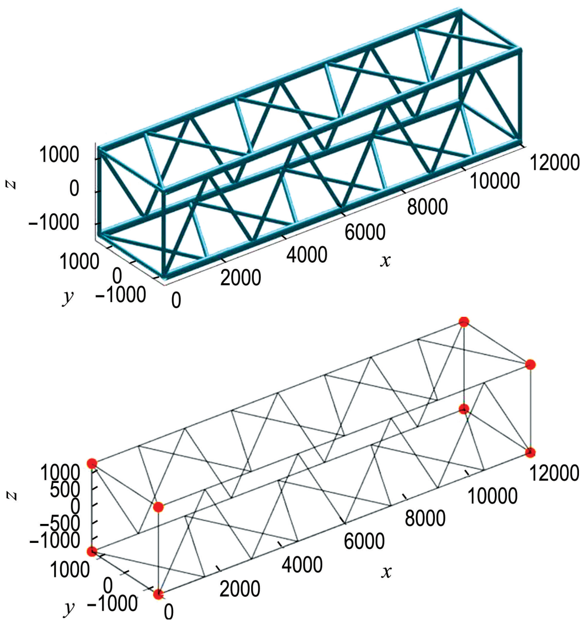


图7　参数化臂节模型

Fig.7　Model of parametric boom section

4.2　参数化臂节的组装

如图8,每个臂节转换为具有两个节点的超级梁单元,单元的节点包括3个平动自由度和3个转动自由度,将所有臂节进行组装形成整体臂架,这样就从很大程度上减少了整个臂架计算过程中求解非线性方程的个数,提高了计算效率.

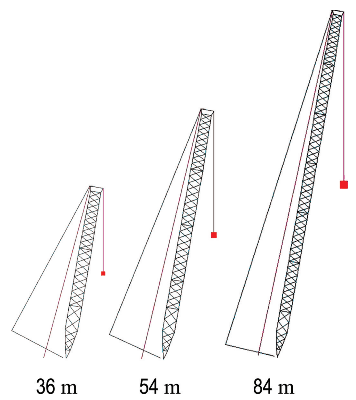


图8　臂架组合

Fig.8　Boom combination

5　臂节子结构节点力平衡方程

超级梁单元内的任意一点位移为$\boldsymbol{u}$,在总体坐标系中速度为

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{u}}_1-(\tilde{\boldsymbol{r}}-\tilde{\boldsymbol{r}}_1)\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{gs}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}\dot{\bar{\boldsymbol{u}}} \tag{21}$$

总体坐标系中,超级梁单元的重力虚功率:

$$\delta\bar{p}_{\mathrm{g}}=\int_v \delta\dot{\boldsymbol{\mu}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}\rho\mathrm{d}v \tag{22}$$

将式(21)代入式(22):

$$\begin{aligned}\delta\bar{p}_{\mathrm{g}}=&\delta\dot{\boldsymbol{u}}_1^{\mathrm{T}}m\boldsymbol{g}+\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}m\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}\tilde{\bar{\boldsymbol{r}}}_{\mathrm{c}}\bar{\boldsymbol{g}}+\int_v\delta\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{g}}\rho\mathrm{d}v=\\&\delta\dot{\boldsymbol{u}}_1^{\mathrm{T}}m\boldsymbol{g}+\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}m\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}\tilde{\bar{\boldsymbol{r}}}_{\mathrm{c}}\bar{\boldsymbol{g}}+\\&\sum_{i=1}^{2}(\delta\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{V}}_i^u\bar{\boldsymbol{g}}+\delta\dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{V}}_i^{\theta}\bar{\boldsymbol{g}})\end{aligned} \tag{23}$$

式中:$\boldsymbol{g}$为总体坐标系中重力加速度,$\bar{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}}$为臂节结构在臂节坐标系中的质心矢径,$\bar{\boldsymbol{V}}_i^u$、$\bar{\boldsymbol{V}}_i^{\theta}$为臂节坐标系下的对应平动与转动的重力离散系数矩阵.

由臂节子结构端面形心自由度所表达的子结构变形虚功率方程为

$$\delta\bar{p}_{\mathrm{e}}=\sum_{i=1}^{2}(\delta\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{f}}_i+\delta\dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{m}}_i) \tag{24}$$

式中:$\bar{\boldsymbol{f}}_i$、$\bar{\boldsymbol{m}}_i$为臂节坐标系下内力虚功率所对应的广义节点力.

根据角速度的叠加原理[19],超级梁单元左右端面在臂节坐标系中的转动角速度可以由臂节坐标系的转动角速度和梁单元端面在总体坐标系下的转动角速度表达:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_1=\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{gs}}),\ \bar{\boldsymbol{\omega}}_2=\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}_2-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{gs}}) \tag{25}$$

在臂节坐标系中,臂节端面的转动均是小转动[20],相应转动角速度与转动矢量变化率之间存在下面的关系:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_1=\boldsymbol{T}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_1}\dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_1,\ \bar{\boldsymbol{\omega}}_2=\boldsymbol{T}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_2}\dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_2 \tag{26}$$

式中

$$\boldsymbol{T}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_1}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\tilde{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_1,\ \boldsymbol{T}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_2}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\tilde{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_2$$

在臂节坐标系下,可以建立节点速度与端面角速度之间的关系:

$$(\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_1\quad \dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_1\quad \dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_2\quad \dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_2)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\theta}}(\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_1\quad \bar{\boldsymbol{\omega}}_1\quad \dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_2\quad \bar{\boldsymbol{\omega}}_2)^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

式中$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\theta}}$为转动矢量的转换矩阵:

$$\boldsymbol{T}_{\theta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_{\bar{\theta}_1}^{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_{\bar{\theta}_2}^{-1}\end{pmatrix} \tag{28}$$

将式(11)代入式(25)，并结合式(4)，得到臂节坐标系与总体坐标系下节点速度与端面角速度之间的关系：

$$(\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{\omega}}_1 \quad \dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_2 \quad \bar{\boldsymbol{\omega}}_2)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}_s(\dot{\boldsymbol{u}}_1 \quad \boldsymbol{\omega}_1 \quad \dot{\boldsymbol{u}}_2 \quad \boldsymbol{\omega}_2)^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

$\boldsymbol{T}_s$ 为两者的转换矩阵：

$$\boldsymbol{T}_s=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_r & \boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T}_{\omega}) & -\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_r & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}+(\tilde{\boldsymbol{r}}_2-\tilde{\boldsymbol{r}}_1)\boldsymbol{T}_r) & \boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{r}}_2-\tilde{\boldsymbol{r}}_1)\boldsymbol{T}_{\omega} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}+(\tilde{\boldsymbol{r}}_2-\tilde{\boldsymbol{r}}_1)\boldsymbol{T}_r) & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_r & -\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{\omega} & -\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_r & \boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} \tag{30}$$

综合式(27)、(29)可以得到：

$$\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}=\boldsymbol{T}_{\theta}\boldsymbol{T}_s\dot{\boldsymbol{u}} \tag{31}$$

式中

$$\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}=(\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_1 \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_1 \quad \dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_2 \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_2)^{\mathrm{T}} \tag{32}$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}=(\dot{\boldsymbol{u}}_1 \quad \boldsymbol{\omega}_1 \quad \dot{\boldsymbol{u}}_2 \quad \boldsymbol{\omega}_2)^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

将式(11)代入重力虚功率式(23)前两项得

$$\delta\dot{\boldsymbol{u}}_1^{\mathrm{T}}m\boldsymbol{g}+\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}m\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}\tilde{\bar{\boldsymbol{r}}}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}=\delta\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}m\boldsymbol{g}-m\boldsymbol{T}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{c}}\\ m\boldsymbol{T}_{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{c}}\\ m\boldsymbol{T}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{c}}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \tag{34}$$

式中 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}\tilde{\bar{\boldsymbol{r}}}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}$.

式(23)第 3 项：

$$\sum_{i=1}^{2}(\delta\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{V}}_i^{u}\bar{\boldsymbol{g}}+\delta\dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_k^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{V}}_i^{\theta}\bar{\boldsymbol{g}})=\delta\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}_{\theta}\boldsymbol{T}_s)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{V}}_1^{u}\bar{\boldsymbol{g}}\\ \bar{\boldsymbol{V}}_1^{\theta}\bar{\boldsymbol{g}}\\ \bar{\boldsymbol{V}}_2^{u}\bar{\boldsymbol{g}}\\ \bar{\boldsymbol{V}}_2^{\theta}\bar{\boldsymbol{g}}\end{pmatrix} \tag{35}$$

臂节子结构内力虚功率与重力产生的虚功率之差：

$$\delta\bar{p}_{\mathrm{e}}-\delta\bar{p}_{\mathrm{g}}=\delta\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}((\boldsymbol{T}_{\theta}\boldsymbol{T}_s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}-\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}) \tag{36}$$

其中臂节坐标系下结构的广义节点力

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{f}}_1-\bar{\boldsymbol{V}}_1^{u}\bar{\boldsymbol{g}}\\ \bar{\boldsymbol{m}}_1-\bar{\boldsymbol{V}}_1^{\theta}\bar{\boldsymbol{g}}\\ \bar{\boldsymbol{f}}_2-\bar{\boldsymbol{V}}_2^{u}\bar{\boldsymbol{g}}\\ \bar{\boldsymbol{m}}_2-\bar{\boldsymbol{V}}_2^{\theta}\bar{\boldsymbol{g}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}=\begin{pmatrix}m\boldsymbol{g}-m\boldsymbol{T}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{c}}\\ m\boldsymbol{T}_{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{c}}\\ m\boldsymbol{T}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{c}}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \tag{37}$$

式(36)给出了臂节结构由内力与重力在总体坐标系下产生的广义力，那么臂节子结构的平衡方程可以表达为

$$(\boldsymbol{T}_{\theta}\boldsymbol{T}_s)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}-\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}-\boldsymbol{T}_Q=\boldsymbol{0} \tag{38}$$

式中 $\boldsymbol{T}_Q$ 来源于臂架所承受的外部荷载.

6　单元应力计算与强度荷载搜索

6.1　重力均布的梁单元应力计算

对于梁单元应力的计算，通常的处理方式是单元自重以等效节点力的方式作用到单元节点上，单元内部不受重力，而准确的描述应该是重力以均布荷载作用于整个单元，从而相对准确地计算单元的最大应力位置，并且可以得到应力在整个单元的分布情况.

$\bar{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{e}}$ 为线性梁单元刚度阵，$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{e}}$ 为线性梁单元在单元坐标系中的节点参数，单元的平衡方程为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}}+\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{e}}=\bar{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{e}}\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{e}} \tag{39}$$

式中梁单元重力的等效节点力为

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{e}}=\Big(0 \quad \frac{mg}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{mgl}{12} \quad 0 \quad \frac{mg}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{mgl}{12}\Big)^{\mathrm{T}} \tag{40}$$

重力加速度在梁单元坐标系下：

$$\bar{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{e}}=(\bar{g}_x^{\mathrm{e}} \quad \bar{g}_y^{\mathrm{e}} \quad \bar{g}_z^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}} \tag{41}$$

梁单元中距梁单元坐标系原点长度为 L 的截面上节点力：

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{n}}&=-F_{1x}-\rho AL\bar{g}_x^{\mathrm{e}}\\ F_y&=-F_{1y}-\rho AL\bar{g}_y^{\mathrm{e}}\\ F_z&=-F_{1z}-\rho AL\bar{g}_z^{\mathrm{e}}\\ T_x&=-M_{1x}\\ M_y&=-M_{1y}-LF_{1z}-\frac{1}{2}\rho AL^2\bar{g}_z^{\mathrm{e}}\\ M_z&=-M_{1z}+LF_{1y}+\frac{1}{2}\rho AL^2\bar{g}_y^{\mathrm{e}}\end{aligned} \tag{42}$$

式中：ρ 为梁单元材料密度，A 为截面面积，$(F_{1x} \quad F_{1y} \quad F_{1z} \quad M_{1x} \quad M_{1y} \quad M_{1z})$ 为梁单元坐标系下节点的节点力.

单元截面轴向拉压应力和弯曲应力合成单元

的正应力,图9所示为轴向应力与弯曲应力的组合示意图.

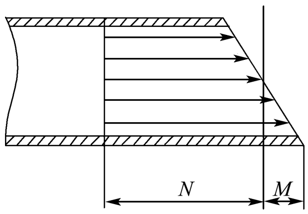


图9　组合应力

Fig.9　Combined stress

轴向力在梁单元截面上正应力

$$\sigma_{1\mathrm{n}}=\frac{|F_{\mathrm{n}}|}{A}=\left|\frac{-F_{1x}-\rho AL\bar{g}_x^{\mathrm{e}}}{A}\right| \tag{43}$$

弯矩在梁单元截面上的弯曲应力

$$\begin{aligned}\sigma_{1y}&=\frac{|M_y|}{W_y}=\left|\frac{-M_{1y}-LF_{1z}-\frac{1}{2}\rho AL^2\bar{g}_z^{\mathrm{e}}}{W_y}\right|\\ \sigma_{1z}&=\frac{|M_z|}{W_z}=\left|\frac{-M_{1z}+LF_{1y}+\frac{1}{2}\rho AL^2\bar{g}_y^{\mathrm{e}}}{W_z}\right|\end{aligned} \tag{44}$$

式中:W_y、W_z为梁单元的抗弯模量.

剪切应力在各截面上是相等的,在中性轴处剪切应力最大:

$$\tau_{1\mathrm{f}}=\frac{\sqrt{(F_{1x}+\rho AL\bar{g}_x^{\mathrm{e}})^2+(F_{1y}+\rho AL\bar{g}_y^{\mathrm{e}})^2}}{2A} \tag{45}$$

扭转剪切应力在梁单元各截面相等,其最大值为

$$\tau_{1\mathrm{t}}=\frac{|T_x|}{W_{\mathrm{t}}} \tag{46}$$

式中:W_{t}为梁单元的抗扭模量.

分别对合成正应力与剪切应力求导,可得到最大应力对应的长度参数$L_{\max}$.

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}(\sigma_{1\mathrm{n}}+\sqrt{\sigma_{1y}^2+\sigma_{1z}^2})}{\mathrm{d}L}=0\\ &\frac{\mathrm{d}(\tau_{1\mathrm{f}}+\tau_{1\mathrm{t}})}{\mathrm{d}L}=0\end{aligned} \tag{47}$$

梁单元$L_{\max}$截面处最大正应力与剪切应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}&=\sigma_{\mathrm{n}}+\sqrt{\sigma_y^2+\sigma_z^2}\\ \tau_{\max}&=\tau_{\mathrm{f}}+\tau_{\mathrm{t}}\end{aligned} \tag{48}$$

6.2　强度荷载搜索

使桁架式臂架结构达到材料许用应力的荷载称之为强度荷载,强度荷载搜索为一试算过程,而搜索次数很大程度上影响计算效率.本文采用一种基于两点线性插值与三点二次插值的快速搜索强度荷载方法.首先确定一个相对精度较低的荷载区间,通过线性插值方式得到一个更接近结构强度应力的荷载,从而得到了3个荷载点.利用三点插值得到一个新的荷载,在此荷载基础上比较计算应力与结构许用应力之间的精度,在未满足精度要求的情况下,重新选择合适的两点进行再次计算,从而最终搜索到满足精度要求的臂架强度荷载,计算流程如图10所示.

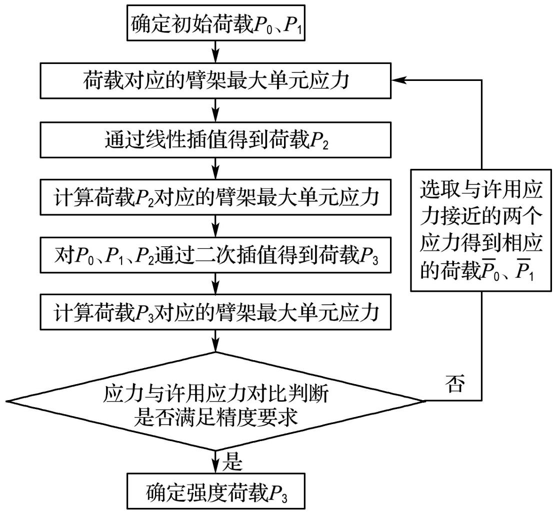


图10　强度荷载搜索流程图

Fig.10　Flow chart of search for strength load

对于确定型号的臂架式起重机而言,明确臂架类型的最大起重量是确定的,以此数据可以确定一个合理的荷载区间$[Q_0,Q_1,\cdots,Q_n]$.初始计算区间假设为$[Q_{n-1},Q_n]$,在$P_0=Q_{n-1}$和$P_1=Q_n$作用下,计算臂架中单元的最大应力σ_0和σ_1,利用线性插值原理选取荷载:

$$P_2=\frac{\sigma_n-\sigma_1}{\sigma_0-\sigma_1}P_0+\frac{\sigma_n-\sigma_0}{\sigma_1-\sigma_0}P_1 \tag{49}$$

σ_2为荷载P_2作用下的单元最大应力,对比σ_2与结构许用应力$\sigma_n=[\sigma]$的数值差是否满足精度要求.未满足要求情况下,针对P_0、P_1、P_2,采用二次插值方式得到更为接近σ_n的荷载:

$$\begin{aligned}P_3=&\frac{(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)}{(\sigma_0-\sigma_1)(\sigma_0-\sigma_2)}P_0+\\ &\frac{(\sigma_n-\sigma_0)(\sigma_n-\sigma_2)}{(\sigma_1-\sigma_0)(\sigma_1-\sigma_2)}P_1+\\ &\frac{(\sigma_n-\sigma_0)(\sigma_n-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_0)(\sigma_2-\sigma_1)}P_2\end{aligned} \tag{50}$$

σ_3为荷载P_3作用下的单元最大应力,计算σ_3与$[\sigma]$的差,对比精度要求,实现一次搜索.

从$[\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]$中选择与$[\sigma]$相差较小的应力对应应力$[\bar{\sigma}_0,\bar{\sigma}_1]$及荷载$[\bar{P}_0,\bar{P}_1]$,在式(50)中

做相应替换，$[\sigma_0,\sigma_1]$与$[\sigma]$的差达到计算精度后，完成强度荷载搜索，满足要求的强度荷载为

$$P=\frac{\overline{P}_0+\overline{P}_1}{2} \tag{51}$$

如不满足精度要求，继续搜索强度荷载.

7　数值算例

7.1　空间悬臂桁架结构

建立桁架式结构(参数见表 3)组成的具有明显几何非线性效应空间结构，采用本文的计算方法计算，与有限元软件 ANSYS 在开启大变形条件下的计算结果进行数值对比.

桁架式结构左端面约束所有自由度；右端为自由端，承受竖直方向荷载. 桁架式结构如图 11 所示，本文与 ANSYS 位移见图 12.

分析数据是基于单肢弦杆单元数量为 2 的前提下进行的对比. 从表 4 中可见：本文位移计算与 ANSYS 误差在 0.3%左右，最大应力误差在 5%以内，并且随着计算应力接近本结构材料许用应力，误差不断减小，能够满足工程要求.

表 3　桁架式结构参数

Tab. 3　Parameters of lattice structure

结构臂节数量/个	结构总长度/m	弹性模量/GPa	泊松比	密度/(kg·m^{-3})	重力加速度/(m·s^{-2})
7	84	210	0.3	7 850	9.8

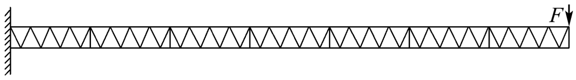


图 11　桁架式结构示意图

Fig. 11　Diagram of lattice structure

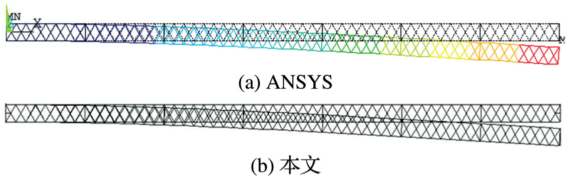


图 12　荷载 150 kN 下的位移

Fig. 12　Displacement under 150 kN load

表 4　桁架式结构位移与应力

Tab. 4　Displacement and stress of lattice structure

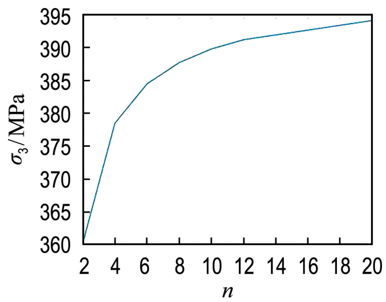
荷载/kN	自由端节点竖直方向最大位移计算数据对比			固定端单元最大正应力计算数据对比		
	本文位移/m	ANSYS 位移/m	误差/%	本文正应力/MPa	ANSYS 正应力/MPa	误差/%
20	2.134 6	2.141 1	−0.30	343.506	360.207	−4.64
40	2.361 6	2.368 8	−0.30	374.951	388.974	−3.61
80	2.815 3	2.824 1	−0.31	437.817	446.527	−1.95
150	3.608 1	3.601 9	0.17	547.739	547.285	0.08

单元数量对于计算精度以及计算规模都有着影响，可根据所需要计算对象的实际需求进行综合考虑. 以本算例中 ANSYS 计算模型进行网格密度改变，对其最大位移以及最大应力进行对比，可以发现随着网格密度增加，最大位移变化在 0.6%以内，对于网格密度的变化并不敏感. 单元最大应力随着网格密度的增加而呈现收敛趋势，最大应力变化在 10%以内，如图 13 所示.

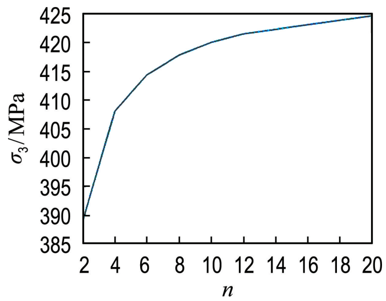
7.2　桁架式起重机臂架

以太原重工 750 t 履带起重机超起 84 m 主臂为例，具体参数如下：臂架工作角度为 30°～85°；侧向荷载与吊重荷载比为 1.5%；弦杆屈服强度、抗拉强度、许用应力分别为 890、960、583 MPa；腹杆屈服强度、抗拉强度、许用应力分别为 770、820、501 MPa；超起桅杆长度为 31.5 m；超起桅杆工作角度为 120°；单侧拉板截面面积为0.004 68 m^2. 在考虑结构几何非线性的情况下，得到相应荷载下的节点力，实现了对臂架强度荷载的快速搜索，得到臂架强度决定的起重性能曲线，如图 14 所示. 图 15、16 为 3 个工况计算结果. 图 17 为 72 m 作业幅度工况下臂架头部侧向位移随着荷载增加的曲线，可以看出，随着荷载不断增加，臂架的几何非线性效应更加明显.

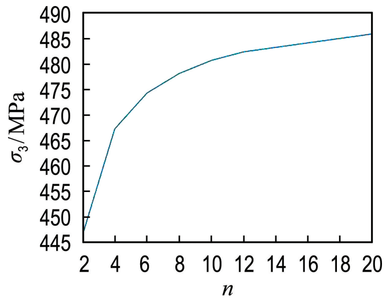
从计算时间上，本文方法与 ANSYS 软件计算对比，在考虑最小增量荷载为 2 kN 的前提下，本文单个工况的计算时间约为 10 s，ANSYS 软件采用几何非线性计算的时间约为 300 s，本文方法计算效率有着很大提高.



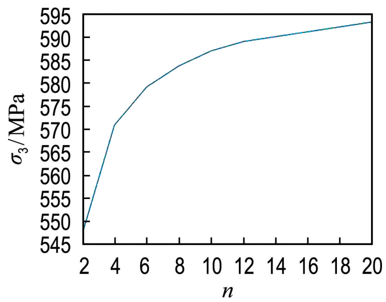
(a) 荷载 20 kN



(b) 荷载 40 kN



(c) 荷载 80 kN



(d) 荷载 150 kN

图 13 不同网格密度下应力收敛曲线

Fig. 13 Stress convergency curves under different grid densities

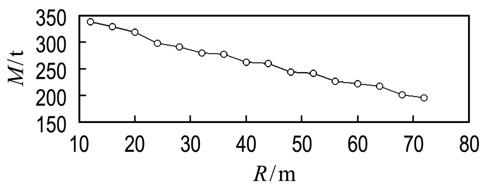
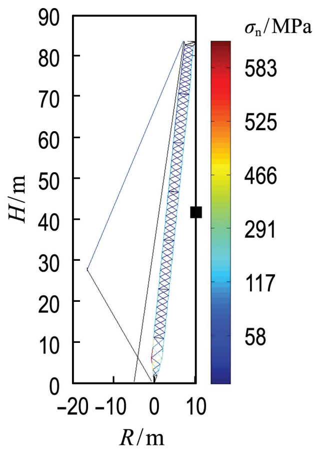
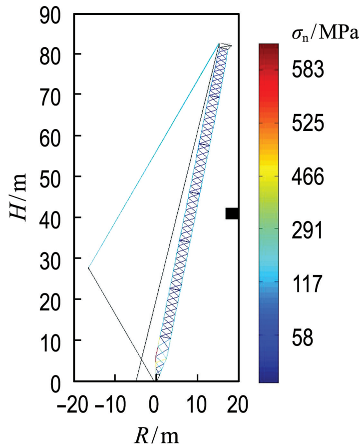


图 14 84 m 主臂结构强度荷载曲线

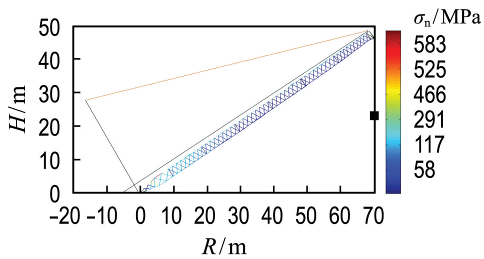
Fig. 14 Strength load curve of 84 m main boom



(a) 12 m 作业幅度



(b) 20 m 作业幅度



(c) 72 m 作业幅度

图 15 84 m 主臂正应力云图

Fig. 15 Normal stress contour of 84 m main boom

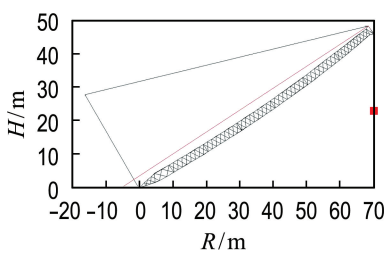


图 16 72 m 作业幅度变形图(5 倍)

Fig. 16 Deformation diagram of 72 m radius (5 times)

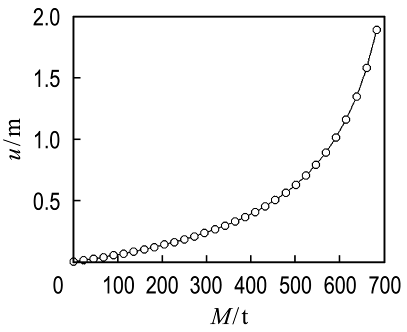


图 17　72 m 作业幅度臂头侧向位移曲线

Fig. 17　Lateral displacement curve of boom head of 72 m radius

8 结　语

针对桁架式起重机臂架，基于子结构方法，在考虑重力离散的前提下，通过两次结构自由度凝聚，形成一种可用于快速参数化建模与计算的超级梁单元，可快速组装参数化的臂架模型. 采用共旋坐标法计算结构的几何非线性效应，建立臂节子结构的节点力平衡方程，进而计算臂架强度. 提出一种基于插值方式的强度荷载搜索方法，能够实现对桁架式臂架强度荷载的快速搜索，在满足计算精度的前提下实现高效率的计算. 通过数值算例验证了本方法的正确性与合理性.

参考文献：

[1] 高顺德，陆　霞，周　杨，等. 基于物理规划的履带起重机变幅系统多目标优化［J］. 大连理工大学学报，2013，**53**(2)：207-213.
GAO Shunde，LU Xia，ZHOU Yang，*et al*. Multi-objective optimization for luffing system of crawler crane based on physical programming［J］. **Journal of Dalian University of Technology**，2013，**53**(2)：207-213.（in Chinese）

[2] 张宏生. 杆系结构几何非线性动静态分析方法及其在塔机中的应用［D］. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2009.
ZHANG Hongsheng. Geometric nonlinear static and dynamic analysis method of beam structures and its application in tower crane［D］. Harbin：Harbin Institute of Technology，2009.（in Chinese）

[3] 王　刚，齐朝晖，孔宪超. 含机构位移起重机主副臂组合臂架结构几何非线性分析［J］. 工程力学，2015，**32**(7)：210-218.
WANG Gang，QI Zhaohui，KONG Xianchao. Geometric nonlinear analysis for crane main and sub-boom structures with mechanism displacements［J］. **Engineering Mechanics**，2015，**32**(7)：210-218.（in Chinese）

[4] BATHE K J，BOLOURCHI S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures［J］. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**，1979，**14**(7)：961-986.

[5] PI Yonglin，BRADFORD M A. Non-linear buckling and postbuckling analysis of arches with unequal rotational end restraints under a central concentrated load［J］. **International Journal of Solids and Structures**，2012，**49**(26)：3762-3773.

[6] 王殿龙，骆　广，王　欣，等. 基于弧长法的桁架臂结构全过程非线性稳定性分析［J］. 中国工程机械学报，2015，**13**(6)：480-485.
WANG Dianlong，LUO Guang，WANG Xin，*et al*. Full-process nonlinear stability analysis on truss booms via arc-length method［J］. **Chinese Journal of Construction Machinery**，2015，**13**(6)：480-485.（in Chinese）

[7] 中华人民共和国国家质量监督检疫总局. 起重机设计规范：GB/T 3811—2008［S］. 北京：中国标准出版社，2008.
General Administration of Quality Supervision，Inspection and Quarantine of the People's Republic of China. Design Rules for Cranes：GB/T 3811-2008［S］. Beijing：China Standards Press，2008.（in Chinese）

[8] 齐朝晖，孔宪超，李　坦. 复杂系统子结构界面缝合方法［J］. 工程力学，2013，**30**(9)：10-15，21.
QI Zhaohui，KONG Xianchao，LI Tan. Substructure technique in the analysis of large-scale structure based on interfaces seaming［J］. **Engineering Mechanics**，2013，**30**(9)：10-15，21.（in Chinese）

[9] WANG Rui，ZHANG Jianxun，SERIZAWA H，*et al*. Study of welding inherent deformations in thin plates based on finite element analysis using interactive substructure method［J］. **Materials and Design**，2009，**30**(9)：3474-3481.

[10] 马春生，胡经耀，张金换，等. 子结构方法在汽车侧面碰撞仿真中的应用［J］. 清华大学学报(自然科学版)，2010，**50**(2)：290-294.
MA Chunsheng，HU Jingyao，ZHANG Jinhuan，*et al*. Application of sub-structure method for automotive side impact simulations［J］. **Journal of Tsinghua University (Science and Technology)**，2010，**50**(2)：290-294.（in Chinese）

[11] 沈煜年，尹晓春. 变截面柔性杆撞击动力学子结构法研究［J］. 大连理工大学学报，2006，**56**(s1)：33-39.
SHEN Yunian，YIN Xiaochun. Research on substructure technique for dynamics of variable section flexible rod with impact［J］. **Journal of Dalian University of Technology**，2006，**56**(s1)：33-

39.(in Chinese)

[12] 许红胜,周绪红,舒兴平. 空间钢框架几何非线性分析的一种新单元[J]. 工程力学,2003,**20**(4):39-44.
XU Hongsheng,ZHOU Xuhong,SHU Xingping. A new element for geometric nonlinear analysis for three-dimensional steel frames [J]. **Engineering Mechanics**,2003,**20**(4):39-44.(in Chinese)

[13] 夏拥军,陆念力. 梁杆结构二阶效应分析的一种新型梁单元[J]. 工程力学,2007,**24**(7):39-43.
XIA Yongjun,LU Nianli. A new beam element for second-order effect analysis of beam structures [J]. **Engineering Mechanics**,2007,**24**(7):39-43.(in Chinese)

[14] ZUBYDAN A H,ELSABBAGH A I,SHARAF T,*et al*. Inelastic large deflection analysis of space steel frames using an equivalent accumulated element [J]. **Engineering Structures**,2018,**162**:121-134.

[15] WEMPNER G. Finite elements,finite rotations and small strains of flexible shells [J]. **International Journal of Solids and Structures**,1969,**5**(2):117-153.

[16] 泰德·彼莱奇科,荣锦·廖,伯安·默然,等. 连续体和结构的非线性有限元[M]. 庄 茁,译. 北京:清华大学出版社,2002.
BELYTSCHKO T,LIU W K,MORAN B,*et al*. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures** [M]. ZHUANG Zhuo,trans. Beijing:Tsinghua University Press,2002.(in Chinese)

[17] 李启宇. 履带起重机臂架系统快速建模非线性分析与性能表制定研究[D]. 太原:太原科技大学,2017.
LI Qiyu. Researches of lift chart forming on nonlinear analysis of boom system as rapid modeling to crawler crane [D]. Taiyuan:Taiyuan University of Science and Technology,2017.(in Chinese)

[18] 张志彬,金福江,汤仪平. 一种改进的一维搜索指数优化算法[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2012,**33**(5):503-505.
ZHANG Zhibin,JIN Fujiang,TANG Yiping. An improved exponential optimization algorithm of one-dimensional search [J]. **Journal of Huaqiao University (Natural Science)**,2012,**33**(5):503-505.(in Chinese)

[19] 齐朝晖. 多体系统动力学[M]. 北京:科学出版社,2008.
QI Zhaohui. **Dynamics of Multibody Systems** [M]. Beijing:Science Press,2008.(in Chinese)

[20] IBRAHIMBEGOVIC A. On the choice of finite rotation parameters [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**,1997,**149**(1):49-71.

Strength load calculation of a kind of super beam element in lattice boom structure

XU Jinshuai[1], QI Zhaohui[*1], GAO Lingchong[2], ZHUO Yingpeng[1], LI Qiang[3]

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Chair of Materials Handling, Material Flow and Logistics, Technical University of Munich, Garching 85748, Germany;
3. Taiyuan Heavy Industry Co., LTD, Taiyuan 030021, China)

Abstract: The calculation of the strength bearing capacity of the lattice boom structure is one of the central calculations of the boom crane. A single boom section is considered as a substructure to condense its internal degrees of freedom to the left and right ends. Based on the assumption of the rigidity of the ends of the boom section, the boundary degrees of freedom are further condensed to the centroid of the boom section's ends, and the weight of the boom section is discretized to the centroid node to form a super beam element considering the gravity. Based on the co-rotational coordinate method, the floating coordinate system of each boom section is established, which can accurately calculate the element stress taking into account the geometric nonlinear effect of long boom. By establishing the balance equation of the node force of the boom, the displacement and rotation angle of the beam element nodes are obtained, and the structural strength of the boom is calculated. Based on the numerical interpolation method, a fast search method of strength load is proposed to realize the fast search of boom strength load and obtain the bearing capacity of boom strength. The numerical examples show that this method has high efficiency and accuracy in the fast calculation of the strength bearing capacity of lattice boom structure.

Key words: lattice boom; super beam element; geometric nonlinear; degree of freedom condensation; strength load search; interpolation method