

含参向量优化问题的 Lipschitz 连续性

孟旭东*

(南昌航空大学科技学院, 江西 共青城 332020)

摘要: 在赋范空间中研究了含参向量优化问题的 Lipschitz 连续性. 在目标函数和可行集分别受参数扰动的前提下, 给出了含参向量优化问题的弱解映射、解映射、弱最优值映射及最优值映射的上 Lipschitz 连续性和下 Lipschitz 连续性的充分条件. 研究结果表明, 含参向量优化问题的(弱)解映射的上(下)Lipschitz 连续性和(弱)最优值映射的上(下)Lipschitz 连续性皆具有统一性规律.

关键词: 向量优化问题; 解映射; 最优值映射; Lipschitz 连续性

中图分类号: O221.3

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb202102013

0 引言

最优化问题的各种最优值映射和最优解映射的定量分析是最优化理论和应用中的一个有趣而重要的课题. 最优值映射或最优解映射往往具有一些几何性质, 如 Hölder 连续性、Lipschitz 连续性、平静性、可微性和次可微性等. 它在模型表述、最优性描述、逼近理论, 特别是对于无限维问题及数值程序中都有重要影响. 因此, 有必要从定量的角度对各种最优值映射或最优化问题的各种最优解映射得到一些结果. 到目前为止, 诸多文献讨论了扰动变分不等式、扰动平衡问题及扰动优化问题的连续性^[1-11]. 研究各种问题解映射的连续性, 可以丰富和发展运筹学的相关理论研究及算法设计, 并能应用于资源分配、交通均衡、运筹管理及工程技术等众多领域.

然而, 仅有少量文献研究了扰动优化问题的 Hölder 连续性和 Lipschitz 连续性^[12-16]. Li 等在文献[12]中引入了目标函数的强凸性来分析扰动向量优化问题最优解映射的 Hölder 连续性. 然而, 有许多例子表明, 扰动优化问题目标函数的强凸性是非常严格的. 在文献[13]中, Li 等得到了含参向量均衡问题近似解映射的 Lipschitz 连续

性定理. Sadeqi 等在文献[14]中分析了含参广义向量均衡问题近似有效解映射的 Lipschitz 连续性. 在不具单调性的适当条件下, Han 在文献[15]中讨论了含参广义向量均衡问题弱近似有效解映射和强近似有效解映射的 Lipschitz 连续性. 在文献[16]中, 孟旭东等在赋范线性空间中借助标量化方法研究了含参集值向量均衡问题近似解映射的 Lipschitz 连续性定理, 作为应用, 给出了向量问题近似解映射的 Lipschitz 连续的充分性条件. 受以上诸多文献思想的启发, 本文研究含参向量优化问题(弱)解映射和(弱)最优值映射的上(下)Lipschitz 连续性.

1 准备工作

本文设 X, Y, A, Ω 为赋范空间, $\|\cdot\|$ 和 $d(\cdot, \cdot)$ 分别表示赋范空间中的范数和距离, B_X, B_Y, B_A, B_Ω 分别为 X, Y, A, Ω 中的闭单位球, C 为 Y 中的闭凸点锥且 C 的拓扑内部 $\text{int}(C) \neq \emptyset$. 设 D 为 Y 中的非空子集, 点 $y \in D$, 假若 $(D - y) \cap (-\text{int}(C)) = \emptyset$, 则点 y 为 D 的弱有效点, 假若 $(D - y) \cap (-C) = \{0\}$, 则点 y 为 D 的有效点, 记集合 D 的所有弱有效点和有效点的全体分别

收稿日期: 2020-05-15; 修回日期: 2020-12-18.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11201216); 江西省教育厅科学技术重点研究项目(GJJ181565, GJJ191614); 江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ161597).

作者简介: 孟旭东* (1982-), 男, 硕士, 副教授, E-mail: mxudongm@163.com.

为 $E_w(D)$ 和 $E(D)$.

设 $f: X \times \Lambda \rightarrow Y$ 为向量值映射, $F: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 为非空集值映射, 对每个点 $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Omega$, 讨论含参向量优化问题, 简称为问题(PVOP).

$$(PVOP) \min f(x, \lambda), \text{ 使得 } x \in F(\mu) \quad (1)$$

设点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times \Omega$ 给定, 记 $f(\cdot) = f(\cdot, \lambda_0)$, $F = F(\mu_0)$, 研究向量优化问题, 简称为问题(VOP).

$$(VOP) \min f(x), \text{ 使得 } x \in F \quad (2)$$

对任何的点 $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Omega$, 问题(PVOP)的弱最优值映射和最优值映射分别定义为

$$V_w(\lambda, \mu) := E_w(f(F(\mu), \lambda))$$

$$V(\lambda, \mu) := E(f(F(\mu), \lambda))$$

对任何的点 $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Omega$, 问题(PVOP)的弱解映射和解映射分别定义为

$$S_w(\lambda, \mu) := \{x \in F(\mu) : f(x, \lambda) \in V_w(\lambda, \mu)\}$$

$$S(\lambda, \mu) := \{x \in F(\mu) : f(x, \lambda) \in V(\lambda, \mu)\}$$

为研究方便起见, 问题(VOP)的弱最优值映射、最优值映射、弱解映射及解映射分别记为 V_w 、 V 、 S_w 、 S .

设 A 、 B 为赋范空间 X 的非空子集, 记 $\rho(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$, $\rho(B, A) = \sup_{a \in A} d(B, a)$, 其中 $d(a, B) := \inf_{b \in B} \|a - b\|$, $d(B, a) := \inf_{b \in B} \|a - b\|$. 设 $F: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 为非空集值映射, 映射 F 的图和定义域分别记为

$$\text{Graph}(F) := \{(\mu, x) \in \Omega \times X : x \in F(\mu)\}$$

$$\text{Dom}(F) := \{\mu \in \Omega : F(\mu) \neq \emptyset\}$$

定义1 设 $F: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 为非空集值映射, 则

(1)映射 F 在点 $\mu_0 \in \text{Dom}(F)$ 周围关于常数 $h_F > 0, t_F > 0$ 为 Lipschitz 连续的当且仅当对任何的点 $\mu_1, \mu_2 \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(F(\mu_1), F(\mu_2)) \leq h_F \|\mu_1 - \mu_2\|$$

(2)映射 F 在点 $\mu_0 \in \text{Dom}(F)$ 周围关于常数 $h_F > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的当且仅当对任何的点 $\mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(F(\mu), F(\mu_0)) \leq h_F \|\mu - \mu_0\|$$

(3)映射 F 在点 $\mu_0 \in \text{Dom}(F)$ 周围关于常数 $h_F > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的当且仅当对任何的点 $\mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(F(\mu_0), F(\mu)) \leq h_F \|\mu - \mu_0\|$$

(4)映射 F 在点 $(\mu_0, x_0) \in \text{Graph}(F)$ 周围关于常数 $h_F > 0, t_F > 0$ 为伪 Lipschitz 连续的当且仅当存在点 $0 \in X$ 的邻域 $W_0 \subseteq X$, 使得对任何的点 $\mu_1, \mu_2 \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(F(\mu_1) \cap (x_0 + W_0), F(\mu_2)) \leq h_F \|\mu_1 - \mu_2\|$$

(5)映射 F 在点 $(\mu_0, x_0) \in \text{Graph}(F)$ 周围关于常数 $h_F > 0, t_F > 0$ 为上伪 Lipschitz 连续的当且仅当存在点 $0 \in X$ 的邻域 $W_0 \subseteq X$, 使得对任何的点 $\mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(F(\mu) \cap (x_0 + W_0), F(\mu_0)) \leq h_F \|\mu - \mu_0\|$$

(6)映射 F 在点 $(\mu_0, x_0) \in \text{Graph}(F)$ 周围关于常数 $h_F > 0, t_F > 0$ 为下伪 Lipschitz 连续的当且仅当存在点 $0 \in X$ 的邻域 $W_0 \subseteq X$, 使得对任何的点 $\mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(F(\mu_0) \cap (x_0 + W_0), F(\mu)) \leq h_F \|\mu - \mu_0\|$$

注1 据定义1易知以下结论成立:

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (5); (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5); (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (6); (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (6)

定义2 设 $\varphi: \Omega \rightarrow X$ 为向量值映射, 则映射 φ 在点 $\mu_0 \in \Omega$ 周围关于常数 $h_\varphi > 0, t_\varphi > 0$ 为 Lipschitz 连续当且仅当对任何的点 $\mu_1, \mu_2 \in \mu_0 + t_\varphi B_\Omega$, 有

$$\|\varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2)\| \leq h_\varphi \|\mu_1 - \mu_2\|$$

定义3 设 $f: X \times \Lambda \rightarrow Y$ 为向量值映射, 则

(1)问题(VOP)在 S_w (或 S) 上关于常数 $h_f > 0$ 具有锥全局控制性当且仅当对每个点 $x \in F$, 存在点 $x_0 \in S_w$ (或 $x_0 \in S$), 使得

$$f(x) - f(x_0) + h_f \|x - x_0\| B_Y \subseteq C \quad (3)$$

(2)问题(VOP)在 S_w (或 S) 上关于常数 $h_f > 0$ 具有内部锥全局控制性当且仅当对每个点 $x \in F$, 存在点 $x_0 \in S_w$ (或 $x_0 \in S$), 使得

$$f(x) - f(x_0) + h_f \|x - x_0\| B_Y \subseteq \text{int}(C)$$

(3)问题(VOP)在点 $x_0 \in S_w$ (或 $x_0 \in S$) 周围关于常数 $h_f > 0$ 具有锥局部控制性当且仅当存在点 x_0 的邻域 $U_0 \subseteq X$, 对每个点 $x \in F \cap U_0$, 存在点 $x_0 \in S_w \cap U_0$ (或 $x_0 \in S \cap U_0$), 使得

$$f(x) - f(x_0) + h_f \|x - x_0\| B_Y \subseteq C$$

(4)问题(VOP)在点 $x_0 \in S_w$ (或 $x_0 \in S$) 周围关于常数 $h_f > 0$ 具有内部锥局部控制性当且仅当存在点 x_0 的邻域 $U_0 \subseteq X$, 对每个点 $x \in F \cap U_0$, 存

在点 $x_0 \in S_w \cap U_0$ (或 $x_0 \in S \cap U_0$), 使得

$$f(x) - f(x_0) + h_f \|x - x_0\| B_Y \subseteq \text{int}(C)$$

注 2 (1) 据定义 3 易知, (2) $\Rightarrow$ (1) 且 (4) $\Rightarrow$ (3).

(2) 对任何的点 $y \in Y$, 定义 $\|y\|_+ := d(y, Y \setminus C)$, 则式 (3) 可化为

$$h_f \|x - x_0\| \leq \|f(x) - f(x_0)\|_+ \quad (4)$$

2 问题 (PVOP) 的 (弱) 解映射的 Lipschitz 连续性

设 $f: X \times \Lambda \rightarrow Y$ 为向量值映射, $F: \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 为非空集值映射, 为研究问题叙述方便起见, 给出以下基本假设 (A).

(A1) 问题 (PVOP) 的弱解集在给定点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(S_w)$ 的某邻域内;

(A2) 问题 (PVOP) 的解集在给定点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(S)$ 的某邻域内;

(A3) 映射 F 在点 $\mu_0 \in \text{Dom}(F)$ 周围关于常数 $h_F > 0, t_F > 0$ 具有 Lipschitz 连续性;

(A4) 问题 (VOP) 在 S_w 上关于常数 $h_f > 0$ 具有锥全局控制性;

(A4') 问题 (VOP) 在 S_w 上关于常数 $h_f > 0$ 具有内部锥全局控制性;

(A5) 问题 (VOP) 在 S 上关于常数 $h_f > 0$ 具有锥全局控制性;

(A5') 问题 (VOP) 在 S 上关于常数 $h_f > 0$ 具有内部锥全局控制性;

(A6) 对任何的点 $\lambda \in \Lambda, f(\cdot, \lambda)$ 在 X 上关于常数 $m_f > 0$ 具有 Lipschitz 连续性, 且对任何的点 $x \in X, f(x, \cdot)$ 在点 $\lambda_0 \in \Lambda$ 周围关于常数 $n_f > 0, t_f > 0$ 具有 Lipschitz 连续性;

(A7) 映射 F 在点 $(\mu_0, x_0) \in \text{Graph}(F)$ 周围关于点 $0 \in X$ 的邻域 $U_0 \subseteq X$ 及常数 $h_F > 0, t_F > 0$ 具有上伪 Lipschitz 连续性和下伪 Lipschitz 连续性;

(A8) 对假设 (A7) 中的邻域 $U_0 \subseteq X$, 问题 (VOP) 在点 $x_0 \in S_w$ 周围关于点 $0 \in X$ 的邻域 $Q_0 \subseteq X$, 满足 $Q_0 + Q_0 \subseteq U_0$ 及 $h_f > 0$ 具有锥局部控制性;

(A8') 对假设 (A7) 中的邻域 $U_0 \subseteq X$, 问题 (VOP) 在点 $x_0 \in S_w$ 周围关于点 $0 \in X$ 的邻域

$Q_0 \subseteq X$, 满足 $Q_0 + Q_0 \subseteq U_0$ 及 $h_f > 0$ 具有内部锥局部控制性;

(A9) 对假设 (A7) 中的邻域 $U_0 \subseteq X$, 问题 (VOP) 在点 $x_0 \in S$ 周围关于点 $0 \in X$ 的邻域 $Q_0 \subseteq X$, 满足 $Q_0 + Q_0 \subseteq U_0$ 及 $h_f > 0$ 具有锥局部控制性;

(A9') 对假设 (A7) 中的邻域 $U_0 \subseteq X$, 问题 (VOP) 在点 $x_0 \in S$ 周围关于点 $0 \in X$ 的邻域 $Q_0 \subseteq X$, 满足 $Q_0 + Q_0 \subseteq U_0$ 及 $h_f > 0$ 具有内部锥局部控制性;

(A10) 对假设 (A7) 中的邻域 $U_0 \subseteq X$, 对任何的点 $x \in x_0 + U_0, f(x, \cdot)$ 在点 $\lambda_0 \in \Lambda$ 周围关于常数 $t_f > 0, n_f > 0$ 具有 Lipschitz 连续性, 且对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, f(\cdot, \lambda)$ 在 U_0 上关于常数 $m_f > 0$ 具有 Lipschitz 连续性.

本部分讨论问题 (PVOP) 的弱解映射和解映射的上 Lipschitz 连续性和下 Lipschitz 连续性, 记 $l_f = \frac{2n_f}{h_f}, l_{f,F} = h_F \left(1 + \frac{2m_f}{h_f}\right)$. 基于基本假设 (A), 先给出问题 (PVOP) 的弱解映射和解映射的上 Lipschitz 连续性.

定理 1 对问题 (PVOP) 而言, 若假设 (A1)、(A3)、(A4) 与 (A6) 成立, 则问题 (PVOP) 的弱解映射 $S_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(S_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S_w(\lambda, \mu), S_w) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\| \quad (5)$$

证明 任取点 $x(\lambda, \mu) \in S_w(\lambda, \mu)$, 其中 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$. 据 $S_w(\lambda, \mu)$ 的定义知 $x(\lambda, \mu) \in F(\mu)$ 且 $f(x, \lambda) - f(x(\lambda, \mu), \lambda) \notin -\text{int}(C), \forall x \in F(\mu)$ (6)

据假设 (A3) 知, 存在点 $x(\mu_0) \in F(\mu_0)$, 使得

$$\|x(\lambda, \mu) - x(\mu_0)\| \leq h_F \|\mu - \mu_0\| \quad (7)$$

据假设 (A4) 知, 对以上的点 $x(\mu_0)$, 存在点 $x(\lambda_0, \mu_0) \in S_w$, 使得

$$f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) + h_f \|x(\mu_0) - x(\lambda_0, \mu_0)\| B_Y \subseteq C \quad (8)$$

不失一般性, 不妨假设 $x(\mu_0) \neq x(\lambda_0, \mu_0)$, $f(x(\mu_0), \lambda_0) \neq f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)$. 易见点 $x(\lambda_0,$

$\mu_0) \in F(\mu_0)$, 结合假设(A3)知, 存在点 $x(\mu) \in F(\mu)$, 使得

$$\|x(\lambda_0, \mu_0) - x(\mu)\| \leq h_F \|\mu - \mu_0\| \quad (9)$$

则有

$$\begin{aligned} f(x(\mu), \lambda) - f(x(\lambda, \mu), \lambda) &= f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) - \\ &\quad f(x(\mu_0), \lambda_0) + \\ &\quad w(\lambda, \mu) \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} w(\lambda, \mu) &= f(x(\mu), \lambda) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda) + \\ &\quad f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) + \\ &\quad f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\mu_0), \lambda) + \\ &\quad f(x(\mu_0), \lambda) - f(x(\lambda, \mu), \lambda) \end{aligned}$$

由假设(A6), 知

$$\begin{aligned} \|w(\lambda, \mu)\| &\leq m_f \|x(\mu) - x(\lambda_0, \mu_0)\| + \\ &\quad m_f \|x(\mu_0) - x(\lambda, \mu)\| + \\ &\quad 2n_f \|\lambda - \lambda_0\| \end{aligned}$$

结合式(7)、(9), 得

$$\|w(\lambda, \mu)\| \leq 2m_f h_F \|\mu - \mu_0\| + 2n_f \|\lambda - \lambda_0\| \quad (11)$$

则必有

$$\|f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)\|_+ \leq \|w(\lambda, \mu)\| \quad (12)$$

事实上, 假若 $\|f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)\|_+ > \|w(\lambda, \mu)\|$, 据 $\|\cdot\|_+$ 的定义知

$$\begin{aligned} &f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) + \\ &\quad \|w(\lambda, \mu)\| B_Y \subseteq \text{int}(C) \end{aligned} \quad (13)$$

(1) 若 $\|w(\lambda, \mu)\| = 0$, 则 $w(\lambda, \mu) = 0$, 由式(8)、(10), 知

$$f(x(\mu), \lambda) - f(x(\lambda, \mu), \lambda) \in -\text{int}(C)$$

这与式(6)矛盾.

(2) 若 $\|w(\lambda, \mu)\| \neq 0$, 据 $-\frac{w(\lambda, \mu)}{\|w(\lambda, \mu)\|} \in B_Y$, 注意到

$$\begin{aligned} f(x(\lambda, \mu), \lambda) - f(x(\mu), \lambda) &= f(x(\mu_0), \lambda_0) - \\ &\quad f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) + \\ &\quad \|w(\lambda, \mu)\| \cdot \\ &\quad \left(-\frac{w(\lambda, \mu)}{\|w(\lambda, \mu)\|}\right) \end{aligned}$$

并结合式(13), 得

$$f(x(\lambda, \mu), \lambda) - f(x(\mu), \lambda) \in \text{int}(C)$$

这与式(6)矛盾. 由式(8)、(11)~(13), 有

$$\begin{aligned} h_f \|x(\mu_0) - x(\lambda_0, \mu_0)\| &\leq \|f(x(\mu_0), \lambda_0) - \\ &\quad f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)\|_+ \leq \\ &\quad 2m_f h_F \|\mu - \mu_0\| + \\ &\quad 2n_f \|\lambda - \lambda_0\| \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \|x(\mu_0) - x(\lambda_0, \mu_0)\| &\leq \frac{2m_f h_F}{h_f} \|\mu - \mu_0\| + \\ &\quad \frac{2n_f}{h_f} \|\lambda - \lambda_0\| \end{aligned} \quad (14)$$

结合式(6)、(14), 得

$$\begin{aligned} d(x(\lambda, \mu), S_w) &\leq \|x(\lambda, \mu) - x(\lambda_0, \mu_0)\| \leq \\ &\quad \|x(\lambda, \mu) - x(\mu_0)\| + \\ &\quad \|x(\mu_0) - x(\lambda_0, \mu_0)\| \leq \\ &\quad h_F \left(1 + \frac{2m_f}{h_f}\right) \|\mu - \mu_0\| + \\ &\quad \frac{2n_f}{h_f} \|\lambda - \lambda_0\| = \\ &\quad l_f \|\mu - \mu_0\| + l_{f,F} \|\lambda - \lambda_0\| \end{aligned}$$

注意到点 $x(\lambda, \mu) \in S_w(\lambda, \mu)$ 的任意性知式(5)成立.

据定理1, 结合注2的(1)知

推论 1 对问题(PVOP)而言, 假若假设(A1)、(A3)、(A4')与(A6)成立, 则问题(PVOP)的弱解映射 $S_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(S_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S_w(\lambda, \mu), S_w) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

类似定理1的论证过程可知

定理 2 对问题(PVOP)而言, 假若假设(A2)、(A3)、(A5)与(A6)成立, 则问题(PVOP)的解映射 $S: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(S)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S(\lambda, \mu), S) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

据定理2, 结合注2的(1)知

推论 2 对问题(PVOP)而言, 假若假设(A2)、(A3)、(A5')与(A6)成立, 则问题(PVOP)的解映射 $S: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(S)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 +$

$t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S(\lambda, \mu), S) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

定理 3 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A1)、(A7)、(A8) 与 (A10) 成立, 则问题 (PVOP) 的弱解映射 $S_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $((\lambda_0, \mu_0), x_0) \in \text{Graph}(S_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即存在点 $0 \in X$ 的邻域 $W_0 \subseteq X$, 对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S_w(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0), S_w) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\| \quad (15)$$

证明 设 $W_0 \subseteq X$ 为点 $0 \in X$ 的任何邻域, 满足 $W_0 + h_F t_F B_X \subseteq Q_0$, 则 W_0 为点 $0 \in X$ 在 X 中的理想邻域. 事实上, 对任何的点 $x(\lambda, \mu) \in S_w(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0), \lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 据映射 F 的上伪 Lipschitz 连续性知, 存在点 $x(\mu_0) \in F(\mu_0)$, 使得

$$\|x(\lambda, \mu) - x(\mu_0)\| \leq h_F \|\mu - \mu_0\| \leq h_F t_F \quad (16)$$

则有

$$x(\mu_0) - x_0 = (x(\mu_0) - x(\lambda, \mu)) + (x(\lambda, \mu) - x_0) \in h_F t_F B_X + W_0 \subseteq Q_0$$

故点 $x(\mu_0) \in F(\mu_0) \cap (x_0 + Q_0)$, 据假设 (A8) 知存在点 $x(\lambda_0, \mu_0) \in S_w \cap (x_0 + Q_0)$, 使得

$$f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) + h_f \|x(\mu_0) - x(\lambda_0, \mu_0)\| B_Y \subseteq C \quad (17)$$

不失一般性, 不妨假设 $x(\mu_0) \neq x(\lambda_0, \mu_0)$, $f(x(\mu_0), \lambda_0) \neq f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)$. 易见点 $x(\lambda_0, \mu_0) \in F(\mu_0) \cap (x_0 + Q_0)$, 由 F 的下伪 Lipschitz 连续性知存在点 $x(\mu) \in F(\mu)$, 使得

$$\|x(\lambda_0, \mu_0) - x(\mu)\| \leq h_F \|\mu - \mu_0\| \leq h_F t_F \quad (18)$$

则有

$$x(\mu_0) - x_0 = (x(\mu_0) - x(\lambda_0, \mu_0)) + (x(\lambda_0, \mu_0) - x_0) \in h_F t_F B_X + W_0 \subseteq Q_0 \subseteq U_0$$

且

$$f(x(\mu), \lambda) - f(x(\lambda, \mu), \lambda) = f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) - f(x(\mu_0), \lambda_0) + w(\lambda, \mu)$$

其中

$$w(\lambda, \mu) = f(x(\mu), \lambda) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda) + f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) + f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\mu_0), \lambda) + f(x(\mu_0), \lambda) - f(x(\lambda, \mu), \lambda)$$

由假设 (A10), 知

$$\|w(\lambda, \mu)\| \leq m_f \|x(\mu) - x(\lambda_0, \mu_0)\| + m_f \|x(\mu_0) - x(\lambda, \mu)\| + 2n_f \|\lambda - \lambda_0\|$$

结合式 (16)、(18), 得

$$\|w(\lambda, \mu)\| \leq 2m_f h_F \|\mu - \mu_0\| + 2n_f \|\lambda - \lambda_0\| \quad (19)$$

类似于定理 1 的论证过程有

$$\|f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)\| + \leq \|w(\lambda, \mu)\| \quad (20)$$

由式 (17)、(19)、(20), 知

$$h_f \|x(\mu_0) - x(\lambda_0, \mu_0)\| \leq 2m_f h_F \|\mu - \mu_0\| + 2n_f \|\lambda - \lambda_0\|$$

故

$$\|x(\mu_0) - x(\lambda_0, \mu_0)\| \leq \frac{2m_f h_F}{h_f} \|\mu - \mu_0\| + \frac{2n_f}{h_f} \|\lambda - \lambda_0\| \quad (21)$$

结合式 (16)、(21), 得

$$d(x(\lambda, \mu), S_w) \leq h_F \left(1 + \frac{2m_f}{h_f}\right) \|\mu - \mu_0\| + \frac{2n_f}{h_f} \|\lambda - \lambda_0\| = l_f \|\mu - \mu_0\| + l_{f,F} \|\lambda - \lambda_0\|$$

再据点 $x(\lambda, \mu) \in S_w(\lambda, \mu)$ 的任意性知式 (15) 成立.

据定理 3, 结合注 2 的 (1) 知

推论 3 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A1)、(A7)、(A8') 与 (A10) 成立, 则问题 (PVOP) 的弱解映射 $S_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $((\lambda_0, \mu_0), x_0) \in \text{Graph}(S_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即存在点 $0 \in X$ 的邻域 $W_0 \subseteq X$, 对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S_w(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0), S_w) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

类似定理 3 的证明过程易知

定理 4 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A2)、(A7)、(A9) 与 (A10) 成立, 则问题 (PVOP) 的解映射 $S: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $((\lambda_0, \mu_0), x_0) \in \text{Graph}(S)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即存在点 $0 \in X$ 的邻域 $W_0 \subseteq X$,

对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_A, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0), S) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

据定理 4, 结合注 2 的(1)知

推论 4 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A2)、(A7)、(A9') 与 (A10) 成立, 则问题 (PVOP) 的解映射 $S: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $((\lambda_0, \mu_0), x_0) \in \text{Graph}(S)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即存在点 $\mathbf{0} \in X$ 的邻域 $W_0 \subseteq X$, 对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_A, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0), S) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

类似于问题 (PVOP) 的弱解映射和解映射的上 Lipschitz 连续性的充分性条件, 结合注 2 的(1)易得问题 (PVOP) 的弱解映射和解映射的下 Lipschitz 连续性定理.

定理 5 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A1)、(A3)、(A4) 与 (A6) 成立, 则问题 (PVOP) 的弱解映射 $S_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(S_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_A, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S_w, S_w(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0)) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

推论 5 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A1)、(A3)、(A4') 与 (A6) 成立, 则问题 (PVOP) 的弱解映射 $S_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(S_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_A, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S_w, S_w(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0)) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

定理 6 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A2)、(A3)、(A5) 与 (A6) 成立, 则问题 (PVOP) 的解映射 $S: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(S)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_A, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S, S(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0)) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

推论 6 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A2)、(A3)、(A5') 与 (A6) 成立, 则问题 (PVOP) 的解映射 $S: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in$

$\text{Dom}(S)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_A, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S, S(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0)) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

定理 7 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A1)、(A7)、(A8) 与 (A10) 成立, 则问题 (PVOP) 的弱解映射 $S_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $((\lambda_0, \mu_0), x_0) \in \text{Graph}(S_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即存在点 $\mathbf{0} \in X$ 的邻域 $W_0 \subseteq X$, 对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_A, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S_w, S_w(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0)) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

推论 7 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A1)、(A7)、(A8') 与 (A10) 成立, 则问题 (PVOP) 的弱解映射 $S_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $((\lambda_0, \mu_0), x_0) \in \text{Graph}(S_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即存在点 $\mathbf{0} \in X$ 的邻域 $W_0 \subseteq X$, 对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_A, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S_w, S_w(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0)) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

定理 8 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A2)、(A7)、(A9) 与 (A10) 成立, 则问题 (PVOP) 的解映射 $S: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $((\lambda_0, \mu_0), x_0) \in \text{Graph}(S)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即存在点 $\mathbf{0} \in X$ 的邻域 $W_0 \subseteq X$, 对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_A, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S, S(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0)) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

推论 8 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A2)、(A7)、(A9') 与 (A10) 成立, 则问题 (PVOP) 的解映射 $S: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $((\lambda_0, \mu_0), x_0) \in \text{Graph}(S)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即存在点 $\mathbf{0} \in X$ 的邻域 $W_0 \subseteq X$, 对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_A, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(S, S(\lambda, \mu) \cap (x_0 + W_0)) \leq l_f \|\lambda - \lambda_0\| + l_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

3 问题 (PVOP) 的 (弱) 最优值映射的 Lipschitz 连续性

本部分讨论问题 (PVOP) 的弱最优值映射和

最优值映射的上 Lipschitz 连续性和下 Lipschitz 连续性, 记 $L_f = n_f \left(1 + \frac{2m_f}{h_f}\right)$, $L_{f,F} = m_f h_F \left(1 + \frac{2m_f}{h_f}\right)$. 基于基本假设(A), 首先给出问题(PVOP)的弱最优值映射和最优值映射的上 Lipschitz 连续性.

定理 9 对问题(PVOP)而言, 假若假设(A1)、(A3)、(A4)与(A6)成立, 则问题(PVOP)的弱最优值映射 $V_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(S_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda$, $\mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(V_w(\lambda, \mu), V_w) \leq L_f \|\lambda - \lambda_0\| + L_{f,F} \|\mu - \mu_0\| \quad (22)$$

证明 任取点 $f(x(\lambda, \mu), \lambda) \in V_w(\lambda, \mu)$, 其中 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda$, $\mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 则点 $x(\lambda, \mu) \in F(\mu)$, 且存在点 $x(\mu_0) \in F(\mu_0)$, 使得

$$\|x(\lambda, \mu) - x(\mu_0)\| \leq h_F \|\mu - \mu_0\| \quad (23)$$

据假设(A4)知, 对以上的点 $x(\mu_0)$, 存在点 $x(\lambda_0, \mu_0) \in S_w$, 使得

$$f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) + h_f \|x(\mu_0) - x(\lambda_0, \mu_0)\| B_Y \subseteq C$$

据 $f(\cdot, \lambda_0)$ 的 Lipschitz 连续性知

$$f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) + \frac{h_f}{m_f} \|f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)\| B_Y \subseteq C \quad (24)$$

又 $x(\lambda_0, \mu_0) \in F(\mu_0)$, 结合假设(A3)知, 存在点 $x(\mu) \in F(\mu)$, 使得

$$\|x(\lambda_0, \mu_0) - x(\mu)\| \leq h_F \|\mu - \mu_0\| \quad (25)$$

显然

$$f(x(\mu), \lambda) - f(x(\lambda, \mu), \lambda) = f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) - f(x(\mu_0), \lambda_0) + w(\lambda, \mu)$$

其中

$$w(\lambda, \mu) = f(x(\mu), \lambda) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda) + f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0) + f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\mu_0), \lambda) + f(x(\mu_0), \lambda) - f(x(\lambda, \mu), \lambda)$$

由假设(A6), 知

$$\|w(\lambda, \mu)\| \leq m_f \|x(\mu) - x(\lambda_0, \mu_0)\| + m_f \|x(\mu_0) - x(\lambda, \mu)\| + 2n_f \|\lambda - \lambda_0\|$$

结合式(23)、(25), 得

$$\|w(\lambda, \mu)\| \leq 2m_f h_F \|\mu - \mu_0\| + 2n_f \|\lambda - \lambda_0\| \quad (26)$$

类似定理 1 的证明过程有

$$\|f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)\| + \|w(\lambda, \mu)\| \quad (27)$$

由式(24)、(26)、(27), 知

$$\frac{h_f}{m_f} \|f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)\| \leq 2m_f h_F \|\mu - \mu_0\| + 2n_f \|\lambda - \lambda_0\|$$

故

$$\|f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)\| \leq \frac{2m_f^2 h_F}{h_f} \|\mu - \mu_0\| + \frac{2m_f n_f}{h_f} \|\lambda - \lambda_0\| \quad (28)$$

结合式(23)、(28), 有

$$\begin{aligned} d(f(x(\lambda, \mu), \lambda), V_w) &\leq \|f(x(\lambda, \mu), \lambda) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)\| \leq \\ &\|f(x(\lambda, \mu), \lambda) - f(x(\mu_0), \lambda)\| + \\ &\|f(x(\mu_0), \lambda) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)\| + \\ &\|f(x(\mu_0), \lambda_0) - f(x(\lambda_0, \mu_0), \lambda_0)\| \leq \\ &h_F m_f \left(1 + \frac{2m_f}{h_f}\right) \|\mu - \mu_0\| + \\ &n_f \left(1 + \frac{2m_f}{h_f}\right) \|\lambda - \lambda_0\| = \\ &L_f \|\mu - \mu_0\| + L_{f,F} \|\lambda - \lambda_0\| \end{aligned}$$

再由点 $x(\lambda, \mu) \in S_w(\lambda, \mu)$ 的任意性知式(22)成立.

据定理 9, 结合注 2 的(1)知

推论 9 对问题(PVOP)而言, 假若假设(A1)、(A3)、(A4')与(A6)成立, 则问题(PVOP)的弱最优值映射 $V_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(S_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda$, $\mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(V_w(\lambda, \mu), V_w) \leq L_f \|\lambda - \lambda_0\| + L_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

类似定理 9 的论证过程易得

定理 10 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A2)、(A3)、(A5) 与 (A6) 成立, 则问题 (PVOP) 的最优值映射 $V: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(\mathbf{S})$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(V(\lambda, \mu), V) \leq L_f \|\lambda - \lambda_0\| + L_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

据定理 10, 结合注 2 的(1)知

推论 10 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A2)、(A3)、(A5') 与 (A6) 成立, 则问题 (PVOP) 的最优值映射 $V: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(\mathbf{S})$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为上 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(V(\lambda, \mu), V) \leq L_f \|\lambda - \lambda_0\| + L_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

类似于问题 (PVOP) 的弱最优值映射和最优值映射的上 Lipschitz 连续性定理的讨论过程, 结合注 2 的(1)可得问题 (PVOP) 的弱最优值映射和最优值映射的下 Lipschitz 连续性基本定理.

定理 11 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A1)、(A3)、(A4) 与 (A6) 成立, 则问题 (PVOP) 的弱最优值映射 $V_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(\mathbf{S}_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(V_w, V_w(\lambda, \mu)) \leq L_f \|\lambda - \lambda_0\| + L_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

推论 11 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A1)、(A3)、(A4') 与 (A6) 成立, 则问题 (PVOP) 的弱最优值映射 $V_w: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(\mathbf{S}_w)$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(V_w, V_w(\lambda, \mu)) \leq L_f \|\lambda - \lambda_0\| + L_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

定理 12 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A2)、(A3)、(A5) 与 (A6) 成立, 则问题 (PVOP) 的最优值映射 $V: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(\mathbf{S})$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(V, V(\lambda, \mu)) \leq L_f \|\lambda - \lambda_0\| + L_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

推论 12 对问题 (PVOP) 而言, 假若假设 (A2)、(A3)、(A5') 与 (A6) 成立, 则问题 (PVOP) 的最优值映射 $V: \Lambda \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 在点 $(\lambda_0, \mu_0) \in \text{Dom}(\mathbf{S})$ 周围关于常数 $t_f > 0, t_F > 0$ 为下 Lipschitz 连续的, 即对任何的点 $\lambda \in \lambda_0 + t_f B_\Lambda, \mu \in \mu_0 + t_F B_\Omega$, 有

$$\rho(V, V(\lambda, \mu)) \leq L_f \|\lambda - \lambda_0\| + L_{f,F} \|\mu - \mu_0\|$$

4 结 语

在目标函数和可行集分别受参数扰动的情況下, 在适当假设条件下, 在赋范空间中建立了含参向量优化问题(弱)解映射和(弱)最优值映射的上(下) Lipschitz 连续性充分性基本定理. 研究表明, (弱)解映射和(弱)最优值映射的上(下) Lipschitz 连续的充分性条件均具有统一性规律, 有利于建立含参向量优化问题解映射的 Hölder 连续性的统一规律, 有利于分析各类含参向量优化问题解映射的 Hölder 连续性和 Lipschitz 连续性的统一框架结构, 并为研究含参向量优化问题解映射的稳定性奠定基础.

参考文献:

- [1] YEN N D. Hölder continuity of solutions to a parametric variational inequality [J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 1995, 31(3): 245-255.
- [2] MANSOUR M A, RIAHI H. Sensitivity analysis for abstract equilibrium problems [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, 306(2): 684-691.
- [3] ANH L Q, KHANH P Q. On the Hölder continuity of solutions to parametric multivalued vector equilibrium problems [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, 321(1): 308-315.
- [4] CHEN C R. Hölder continuity of the unique solution to parametric vector quasi-equilibrium problems via nonlinear scalarization [J]. *Positivity*, 2013, 17(1): 133-150.
- [5] LI S J, LI X B. Hölder continuity of solutions to parametric weak generalized Ky Fan inequality [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*,

- 2011, **149**(3): 540-553.
- [6] LI X B, LONG X J, ZENG J. Hölder continuity of the solution set of the Ky Fan inequality [J]. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 2013, **158**(2): 397-409.
- [7] WANGKEEREE R, PREECHASILP P. On the Hölder continuity of solution maps to parametric generalized vector quasi-equilibrium problems via nonlinear scalarization [J]. **Journal of Inequalities and Applications**, 2014, **2014**(1): 425.
- [8] PENG Zaiyun, YANG Xinmin, TEO K L. On the Hölder continuity of approximate solution mappings to parametric weak generalized Ky Fan inequality [J]. **Journal of Industrial and Management Optimization**, 2015, **11**(2): 549-562.
- [9] BONNANS J F, SHAPIRO A. **Perturbation Analysis of Optimization Problems** [M]. New York: Springer, 2000.
- [10] BEDNARCZUK E M. Weak sharp efficiency and growth condition for vector-valued functions with applications [J]. **Optimization**, 2004, **53** (5/6): 455-474.
- [11] LUC D T. **Theory of Vector Optimization: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems** [M]. Berlin: Springer, 1989.
- [12] LI X B, LI S J. Hölder continuity of perturbed solution set for convex optimization problems [J]. **Applied Mathematics and Computation**, 2014, **232**: 908-918.
- [13] LI X B, LI S J, CHEN C R. Lipschitz continuity of an approximate solution mapping to equilibrium problems [J]. **Taiwanese Journal of Mathematics**, 2012, **16**(3): 1027-1040.
- [14] SADEQI I, PAYDAR M S. Lipschitz continuity of an approximate solution mapping for parametric set-valued vector equilibrium problems [J]. **Optimization**, 2016, **65**(5): 1003-1021.
- [15] HAN Yu. Lipschitz continuity of approximate solution mappings to parametric generalized vector equilibrium problems [J]. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 2018, **178**(3): 763-793.
- [16] 孟旭东, 万德龙. 含参集值向量均衡问题近似解映射的 Lipschitz 连续性 [J]. 大连理工大学学报, 2019, **59**(4): 434-440.
- MENG Xudong, WAN Delong. Lipschitz continuity of approximate solution mapping for parametric set-valued vector equilibrium problems [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2019, **59**(4): 434-440. (in Chinese)

Lipschitz continuity for parametric vector optimization problems

MENG Xudong*

(Science and Technology College of Nanchang Hangkong University, Gongqingcheng 332020, China)

Abstract: Lipschitz continuity for parametric vector optimization problems in normed spaces is studied. Some sufficient conditions for the upper Lipschitz continuity and the lower Lipschitz continuity of the weak solution mapping, the solution mapping, the weak optimal value mapping and the optimal value mapping are given under the case that the objective function and the feasible set are perturbed by parameters respectively. The results show that the upper (lower) Lipschitz continuity of (weak) solution mappings and the upper (lower) Lipschitz continuity of (weak) optimal value mappings for parametric vector optimization problems are uniform.

Key words: vector optimization problem; solution mapping; optimal value mapping; Lipschitz continuity