第61卷第6期
2021年11月

大 连 理 工 大 学 学 报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 61, No. 6
Nov. 2021

文章编号：1000-8608(2021)06-0656-05

扩张李代数Schrödinger-Virasoro子代数生成元和一些李子代数幂零性

余德民*， 柴嘉潞， 李 笛， 罗德仁， 吴伟才， 蒋 婵

（湖南理工学院 数学学院，湖南 岳阳 414000）

摘要： 研究了扩张无限维李代数 Schrödinger-Virasoro 子代数的生成元. 证明了李子代数 $\boldsymbol{h}_2$ 与商李代数 $\boldsymbol{h}_5/\boldsymbol{h}_2$ 都无有限生成元，李代数 Schrödinger-Virasoro 有有限生成元且生成元可为 5. 最后证明了李子代数 $\boldsymbol{h}_5$ 为幂零子代数.

关键词： 李代数；同构；子代数

中图分类号： O152.5 **文献标识码：** A **doi：** 10.7511/dllgxb202106014

0 引 言

本文研究扩张李代数 Schrödinger-Virasoro. 这类李代数在数学和理论物理中尤其是共形理论和弦论中有非常重要的应用.

$\mathbf{Z}^+$ 为全体正整数组成的集合，$\mathbf{Z}$ 为全体整数组成的集合，$\mathbf{C}$ 为全体复数组成的集合. $\boldsymbol{g}$ 为 $\mathbf{C}$ 上线性空间，其基向量为 $\boldsymbol{L}_i$、$\boldsymbol{M}_j$、$\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}$、$\boldsymbol{N}_m$（$\forall i,j,n,m\in\mathbf{Z}$），张成的复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间，在 $\boldsymbol{g}$ 的基元素之间定义满足双线性、反对称条件和 Jacobi 恒等式的方括号积如下：

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{L}_n]=(n-m)\boldsymbol{L}_{n+m}$$

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{M}_n]=n\boldsymbol{M}_{n+m}$$

$$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_n]=\mathbf{0}$$

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=(n+\frac{1}{2}-\frac{m}{2})\boldsymbol{Y}_{n+m+\frac{1}{2}}$$

$$[\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_i]=\mathbf{0}$$

$$[\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}},\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=(n-m)\boldsymbol{M}_{n+m+1}$$

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{N}_n]=n\boldsymbol{N}_{n+m}$$

$$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{N}_n]=-2\boldsymbol{M}_{n+m}$$

$$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{N}_n]=\mathbf{0}$$

$$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\boldsymbol{Y}_{m+n+\frac{1}{2}}$$

称 $\boldsymbol{g}$ 为扩张李代数 Schrödinger-Virasoro. 以后为表述方便，称 $\boldsymbol{L}_i$、$\boldsymbol{M}_j$、$\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}$、$\boldsymbol{N}_m$（$\forall i,j,n,m\in\mathbf{Z}$）为自然基向量. 文献[1]研究了扩张李代数 Schrödinger-Virasoro 的结构，文献[2]研究了 Schrödinger-Virasoro 的表示. 本文作者曾研究了 Virasoro 李代数及其推广的 Virasoro 李代数[3-7]. 文献[8-10]研究了推广的 Virasoro 李代数的结构分类，导子、自同构和最高权模. 本文研究扩张李代数 Schrödinger-Virasoro 子代数的有限生成元. 有限生成元是非常重要的数学问题，有着非常广泛和深刻的应用.

1 主要结果

定义 1 设由 $\boldsymbol{L}_i$（$\forall i\in\mathbf{Z}$）张成的子空间为 $\boldsymbol{h}_1$. 设 $\boldsymbol{L}_2$、$\boldsymbol{L}_{-3}$ 生成的李代数记为 $[[\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_{-3}]]$.

由于

$$[\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_{-3}]=-5\boldsymbol{L}_{-1}$$

$$[\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_{-1}]=-3\boldsymbol{L}_1$$

$$[\boldsymbol{L}_{-3},\boldsymbol{L}_1]=4\boldsymbol{L}_{-2}$$

$$[\boldsymbol{L}_{-1},\boldsymbol{L}_1]=2\boldsymbol{L}_0$$

故 $\boldsymbol{L}_{-3},\boldsymbol{L}_{-2},\boldsymbol{L}_{-1},\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2\in[[\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_{-3}]]$.

稍作分析可得，$\boldsymbol{L}_{-3}$、$\boldsymbol{L}_{-2}$、$\boldsymbol{L}_{-1}$、$\boldsymbol{L}_0$、$\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{L}_2$ 能够生成李代数 $\boldsymbol{h}_1$，$\boldsymbol{h}_1$ 的最小生成元为 2.

收稿日期： 2021-03-22； **修回日期：** 2021-09-25.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11901191)；湖南省自然科学基金资助项目(2020JJ5210)；湖南理工学院科研创新团队资助项目(2019-TD-15)；2021年湖南省研究生科研创新项目(YCX2021A27).
作者简介： 余德民*(1975-)，男，博士，副教授，E-mail：yudeming8640024@126.com；柴嘉潞(1998-)，女，硕士生，E-mail：1961006970@qq.com；李 笛(1998-)，女，硕士生，E-mail：1793338770@qq.com；罗德仁(1987-)，男，博士，副教授，E-mail：79274188@qq.com.

现在来考察3个自然基向量 $\boldsymbol{L}_6$、$\boldsymbol{L}_{10}$、$\boldsymbol{L}_{-15}$，由于6、10、−15两两不互素，从而 $\boldsymbol{L}_6$、$\boldsymbol{L}_{10}$、$\boldsymbol{L}_{-15}$ 任意两个自然基向量不能生成李代数 $\boldsymbol{h}_1$，但

$$[\boldsymbol{L}_6,\boldsymbol{L}_{10}]=4\boldsymbol{L}_{16}$$

$$[\boldsymbol{L}_{16},\boldsymbol{L}_{-15}]=-31\boldsymbol{L}_1$$

稍作分析可得，3个自然基向量 $\boldsymbol{L}_6$、$\boldsymbol{L}_{10}$、$\boldsymbol{L}_{-15}$ 能生成李代数 $\boldsymbol{h}_1$. 同理另外考察3个自然基向量 $\boldsymbol{L}_6$、$\boldsymbol{L}_{14}$、$\boldsymbol{L}_{-21}$，由于6、14、−21两两不互素，从而 $\boldsymbol{L}_6$、$\boldsymbol{L}_{14}$、$\boldsymbol{L}_{-21}$ 任意两个自然基向量不能生成李代数 $\boldsymbol{h}_1$，但

$$[\boldsymbol{L}_6,\boldsymbol{L}_{14}]=8\boldsymbol{L}_{20}$$

$$[\boldsymbol{L}_{20},\boldsymbol{L}_{-21}]=-41\boldsymbol{L}_{-1}$$

稍作分析可得，3个自然基向量 $\boldsymbol{L}_6$、$\boldsymbol{L}_{14}$、$\boldsymbol{L}_{-21}$ 能生成李代数 $\boldsymbol{h}_1$.

定理1　设3个自然基向量 $\boldsymbol{L}_i$、$\boldsymbol{L}_j$、$\boldsymbol{L}_m$（$\forall i,j,m\in\mathbf{Z}$）能够生成李代数 $\boldsymbol{h}_1$，则 $\boldsymbol{L}_{-i}$、$\boldsymbol{L}_{-j}$、$\boldsymbol{L}_{-m}$ 也能够生成李代数 $\boldsymbol{h}_1$.

证明　构造满足 $\boldsymbol{h}_1$ 到 $\boldsymbol{h}_1$ 的线性映射如下：

$$\varphi_{0_1}:\varphi_{0_1}(\boldsymbol{L}_i)=-\boldsymbol{L}_{-i},\ \forall i\in\mathbf{Z}$$

$$\varphi_{0_1}([\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{L}_j])=[\varphi_{0_1}(\boldsymbol{L}_i),\varphi_{0_1}(\boldsymbol{L}_j)],\forall i,j\in\mathbf{Z}$$

φ_{0_1} 是 $\boldsymbol{h}_1$ 到 $\boldsymbol{h}_1$ 的同构. $\boldsymbol{L}_i$、$\boldsymbol{L}_j$、$\boldsymbol{L}_m$（$\forall i,j,m\in\mathbf{Z}$）能够生成李代数 $\boldsymbol{h}_1$，由于

$$\varphi_{0_1}(\boldsymbol{L}_i)=-\boldsymbol{L}_{-i}$$

$$\varphi_{0_1}(\boldsymbol{L}_j)=-\boldsymbol{L}_{-j}$$

$$\varphi_{0_1}(\boldsymbol{L}_m)=-\boldsymbol{L}_{-m}$$

则 $\boldsymbol{L}_{-i}$、$\boldsymbol{L}_{-j}$、$\boldsymbol{L}_{-m}$（$\forall i,j,m\in\mathbf{Z}$）能够生成李代数 $\boldsymbol{h}_1$.

□

设由 $\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{L}_{-2},\boldsymbol{L}_{-4},\boldsymbol{L}_{-6},\cdots,\boldsymbol{L}_{-2n},\boldsymbol{L}_{-2n-2},\boldsymbol{L}_{-2n-4},\cdots$ 张成的子空间为 $\boldsymbol{h}_{1_2}$. $\boldsymbol{h}_{1_2}$ 也为 $\boldsymbol{g}$ 的李子代数. 对任意 $\boldsymbol{L}_{2m}$、$\boldsymbol{L}_{2n}$，$\forall m\leqslant 0,n\leqslant 0,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}$ 不能李生成 $\boldsymbol{h}_{1_2}$，用定理表述如下.

定理2　$\forall m\leqslant 0,m\in\mathbf{Z},n\leqslant 0,n\in\mathbf{Z}$，$\boldsymbol{L}_{2m}$、$\boldsymbol{L}_{2n}$ 不能李生成 $\boldsymbol{h}_{1_2}$.

证明　采用反证法，设 $\boldsymbol{L}_{2m}$、$\boldsymbol{L}_{2n}$，$\forall m<0,n<0,n\in\mathbf{Z},m\in\mathbf{Z}$ 能李生成 $\boldsymbol{h}_{1_2}$. 由于

$$[\boldsymbol{L}_{2m},\boldsymbol{L}_{2n}]=2(n-m)\boldsymbol{L}_{2(n+m)}；\ m<0,n<0,n+m<0$$

必有

$$\boldsymbol{L}_0\notin[[\boldsymbol{L}_{2m},\boldsymbol{L}_{2n}]]$$

从而 m、n 必有一个为0，假设 m、n 其中有一个为0，不妨假设 $n=0$，则由于

$$[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{L}_{2m}]=2m\boldsymbol{L}_{2m}$$

显然

$$\boldsymbol{L}_{2m-2}\notin[[\boldsymbol{L}_{2m},\boldsymbol{L}_0]]$$

从而矛盾. 假设 m、n 都为0，则由于

$$[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{L}_0]=\mathbf{0}$$

显然

$$\boldsymbol{L}_{-2}\notin[[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{L}_0]]$$

从而矛盾.

□

定理3　$\forall m\leqslant 0,m\in\mathbf{Z},n\leqslant 0,n\in\mathbf{Z},k\leqslant 0,k\in\mathbf{Z}$，$\boldsymbol{L}_{2m}$、$\boldsymbol{L}_{2n}$、$\boldsymbol{L}_{2k}$ 能李生成 $\boldsymbol{h}_{1_2}$，则 $\{2m,2n,2k\}=\{0,-2,-4\}$.

证明　由于 m、n、k 都是非正整数，显然 m、n、k 必有一个等于0，否则

$$\boldsymbol{L}_0\notin[[\boldsymbol{L}_{2m},\boldsymbol{L}_{2n},\boldsymbol{L}_{2k}]]$$

不妨设 $m=0$，$2n$、$2k$ 必有一个等于−2，否则

$$\boldsymbol{L}_{-2}\notin[[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{L}_{2n},\boldsymbol{L}_{2k}]]$$

不妨设 $2n=-2$，$2k$ 必等于−4，否则

$$\boldsymbol{L}_{-4}\notin[[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{L}_{-2},\boldsymbol{L}_{2k}]]$$

从而 $\{2m,2n,2k\}=\{0,-2,-4\}$，进一步可以证明 $\boldsymbol{L}_0$、$\boldsymbol{L}_{-2}$、$\boldsymbol{L}_{-4}$ 确实能够李生成 $\boldsymbol{h}_{1_2}$.

□

设由 $\boldsymbol{M}_i$（$\forall i\in\mathbf{Z}$）张成的子空间为 $\boldsymbol{h}_2$，$\boldsymbol{h}_2$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维交换子代数.

定理4　$\boldsymbol{h}_2$ 无有限生成元.

证明　采用反证法，设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 为其有限生成元，$\forall i,j\in\mathbf{Z}$，

$$[\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{M}_j]=\mathbf{0}$$

从而 $\forall i,j\in\mathbf{Z}$，

$$[\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j]=\mathbf{0}$$

$\boldsymbol{h}_2$ 是无限维李代数，从而必存在 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{x}$ 不能被 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性表示，即 $\boldsymbol{x}\neq k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{x}_n$，原命题成立.

□

设由 $\boldsymbol{L}_i$、$\boldsymbol{M}_j$（$\forall i,j\in\mathbf{Z}$）张成的子空间为 $\boldsymbol{h}_4$，

$\boldsymbol{h}_4$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数.

设由 $\boldsymbol{M}_i$、$\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}$($\forall i,n\in\mathbf{Z}$)张成的子空间为 $\boldsymbol{h}_5$. $\boldsymbol{h}_5$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数. $\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}$($\forall n\in\mathbf{Z}$)张成的子空间为 $\boldsymbol{h}_6$.

定理 5 $\boldsymbol{h}_5$ 无有限生成元.

证明 采用反证法,设 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 为其有限生成元,由于

$$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_n]=\mathbf{0}$$

$$[\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_i]=\mathbf{0}$$

$$[\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}},\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=(n-m)\boldsymbol{M}_{n+m+1}$$

不妨设

$$\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{y}_{i_1}+\boldsymbol{y}_{i_2};\ \boldsymbol{y}_{i_1}\in\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{y}_{i_2}\in\boldsymbol{h}_6$$

$$[\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j]=[\boldsymbol{y}_{i_1}+\boldsymbol{y}_{i_2},\boldsymbol{y}_{j_1}+\boldsymbol{y}_{j_2}]=$$
$$[\boldsymbol{y}_{i_2},\boldsymbol{y}_{j_2}]\in\boldsymbol{h}_2$$

而 $\boldsymbol{h}_6$ 是无限维线性空间,从而必存在 $\boldsymbol{y}$,使得 $\boldsymbol{y}$ 不能被 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 线性表示,即 $\boldsymbol{y}\neq k_1\boldsymbol{y}_{1_2}+k_2\boldsymbol{y}_{2_2}+\cdots+k_n\boldsymbol{y}_{n_2}$. 则 $\boldsymbol{y}$ 无法由 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 李运算生成,从而原命题成立.

□

$\boldsymbol{h}_5$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数,$\boldsymbol{h}_2$ 为 $\boldsymbol{h}_5$ 的理想,作李代数 $\boldsymbol{h}_5$ 对 $\boldsymbol{h}_2$ 的商空间 $\boldsymbol{h}_5/\boldsymbol{h}_2=\{\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}_2\}$. 定义换位运算为

$$[\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}]=[\overline{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}],\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{h}_5$$

则 $\boldsymbol{h}_5/\boldsymbol{h}_2$ 也是李代数.

定理 6 商李代数 $\boldsymbol{h}_5/\boldsymbol{h}_2$ 无有限生成元.

证明

$$\forall\,\boldsymbol{x},\ \bar{\boldsymbol{x}}=\sum_{j=1}^{n}p_j\overline{\boldsymbol{Y}}_{j+\frac{1}{2}}$$

$$\forall\,\boldsymbol{y},\ \bar{\boldsymbol{y}}=\sum_{i=1}^{n}q_i\overline{\boldsymbol{Y}}_{i+\frac{1}{2}}$$

由于

$$[\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}]=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{i\in\mathbf{Z}}p_jq_i[\overline{\boldsymbol{Y}}_{j+\frac{1}{2}},\overline{\boldsymbol{Y}}_{i+\frac{1}{2}}]=$$
$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{i\in\mathbf{Z}}p_jq_i(j-i)\overline{\boldsymbol{M}}_{i+j+1}=0$$

商李代数 $\boldsymbol{h}_5/\boldsymbol{h}_2$ 为交换李代数,商李代数 $\boldsymbol{h}_5/\boldsymbol{h}_2$ 为无限维交换李代数. 商李代数 $\boldsymbol{h}_5/\boldsymbol{h}_2$ 无有限生成元.

□

定理 7 $\boldsymbol{h}_5$ 为幂零李代数.

证明 $\boldsymbol{h}_5$ 的李运算如下:

由于

$$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_n]=\mathbf{0}$$

$$[\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_i]=\mathbf{0}$$

$$[\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}},\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=(n-m)\boldsymbol{M}_{n+m+1}$$

不妨设

$$\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{y}_{i_1}+\boldsymbol{y}_{i_2};\ \boldsymbol{y}_{i_1}\in\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{y}_{i_2}\in\boldsymbol{h}_6$$

由于

$$[\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j]=[\boldsymbol{y}_{i_1}+\boldsymbol{y}_{i_2},\boldsymbol{y}_{j_1}+\boldsymbol{y}_{j_2}]=$$
$$[\boldsymbol{y}_{i_2},\boldsymbol{y}_{j_2}]\in\boldsymbol{h}_2$$

从而

$$\boldsymbol{h}_5^1=[\boldsymbol{h}_5,\boldsymbol{h}_5]\subseteq\boldsymbol{h}_2$$

又由于

$$\boldsymbol{Y}_{0+\frac{1}{2}}\in\boldsymbol{h}_5,\forall\,n,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}\in\boldsymbol{h}_5,$$

$$\boldsymbol{h}_2=\boldsymbol{h}_5^1\subseteq[\boldsymbol{h}_5,\boldsymbol{h}_5],$$

$$\boldsymbol{h}_5^2=[\boldsymbol{h}_5,\boldsymbol{h}_5^1]=[\boldsymbol{h}_5,\boldsymbol{h}_2]=\mathbf{0}$$

从而 $\boldsymbol{h}_5$ 为幂零李代数.

□

定理 8 $\boldsymbol{g}$ 有有限生成元. $\boldsymbol{g}$ 的生成元可为 5.

证明 $\boldsymbol{g}$ 的李运算如下:

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{L}_n]=(n-m)\boldsymbol{L}_{n+m}$$

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{M}_n]=n\boldsymbol{M}_{n+m}$$

$$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_n]=\mathbf{0}$$

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\left(n+\frac{1}{2}-\frac{m}{2}\right)\boldsymbol{Y}_{n+m+\frac{1}{2}}$$

$$[\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_i]=\mathbf{0}$$

$$[\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}},\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=(n-m)\boldsymbol{M}_{n+m+1}$$

可知 $\boldsymbol{L}_2$、$\boldsymbol{L}_{-3}$ 能够生成 $\boldsymbol{h}_1$,因为

$$[\boldsymbol{L}_{-2+i},\boldsymbol{M}_2]=2\boldsymbol{M}_i$$

$$[\boldsymbol{L}_{-2+i},\boldsymbol{N}_2]=2\boldsymbol{N}_i$$

$$[\boldsymbol{L}_{-2+i},\boldsymbol{Y}_{2+\frac{1}{2}}]=\left(2+\frac{1}{2}-\frac{-2+i}{2}\right)\boldsymbol{Y}_{i+\frac{1}{2}}=$$
$$\left(\frac{7}{2}-\frac{i}{2}\right)\boldsymbol{Y}_{i+\frac{1}{2}}$$

若 $i\neq7$

$$\boldsymbol{Y}_{i+\frac{1}{2}}\in[[\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_{-3},\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{Y}_{2+\frac{1}{2}}]]$$

若 $i=7$,由于

$$[\boldsymbol{L}_4,\boldsymbol{Y}_{2+\frac{1}{2}}]=\left(2+\frac{1}{2}-\frac{4}{2}\right)\boldsymbol{Y}_{6+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{Y}_{6+\frac{1}{2}}$$

则

$$\boldsymbol{Y}_{6+\frac{1}{2}}\in[[\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_{-3},\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{Y}_{2+\frac{1}{2}}]]$$

若

$$[\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{Y}_{6+\frac{1}{2}}]=6\boldsymbol{Y}_{7+\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{Y}_{7+\frac{1}{2}}\in[[\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_{-3},\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{Y}_{2+\frac{1}{2}}]]$$

$\forall i,\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{Y}_{i+\frac{1}{2}}\in[[\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_{-3},\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{Y}_{2+\frac{1}{2}}]]$，从而 $\boldsymbol{g}$ 的生成元可为 5.

□

定理 9　$\boldsymbol{g}$ 不为可解李代数.

证明　方法 1：$\boldsymbol{g}$ 的李运算如下：

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{L}_n]=(n-m)\boldsymbol{L}_{n+m}$$

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{M}_n]=n\boldsymbol{M}_{n+m}$$

$$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_n]=\boldsymbol{0}$$

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\left(n+\frac{1}{2}-\frac{m}{2}\right)\boldsymbol{Y}_{n+m+\frac{1}{2}}$$

$$[\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_i]=\boldsymbol{0}$$

$$[\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}},\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=(n-m)\boldsymbol{M}_{n+m+1}$$

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{N}_n]=n\boldsymbol{N}_{n+m}$$

$$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{N}_n]=-2\boldsymbol{M}_{n+m}$$

$$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{N}_n]=\boldsymbol{0}$$

$$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\boldsymbol{Y}_{m+n+\frac{1}{2}}$$

由于

$$[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{L}_6]=6\boldsymbol{L}_6$$

从而

$$\boldsymbol{L}_6\in[\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}]$$

由于

$$[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{L}_{-15}]=-15\boldsymbol{L}_{-15}$$

从而

$$\boldsymbol{L}_{-15}\in[\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}]$$

由于

$$[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{L}_{10}]=10\boldsymbol{L}_{10}$$

从而

$$\boldsymbol{L}_{10}\in[\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}]$$

$$[\boldsymbol{L}_6,\boldsymbol{L}_{10}]=4\boldsymbol{L}_{16}$$

$$[\boldsymbol{L}_{-15},\boldsymbol{L}_{16}]=31\boldsymbol{L}_1$$

进而

$$\boldsymbol{L}_1\in[\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}]$$

$$[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{N}_2]=2\boldsymbol{N}_2$$

从而

$$\boldsymbol{N}_2\in[\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}]$$

由于

$$[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{M}_2]=2\boldsymbol{M}_2$$

从而

$$\boldsymbol{M}_2\in[\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}]$$

由于

$$[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{Y}_{2+\frac{1}{2}}]=\left(2+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{Y}_{2+\frac{1}{2}}$$

从而

$$\boldsymbol{Y}_{2+\frac{1}{2}}\in[\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}]$$

进而有

$$\boldsymbol{g}^{(1)}=[\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}]=\boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{g}^{(2)}=[\boldsymbol{g}^{(1)},\boldsymbol{g}^{(1)}]=\boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{g}^{(3)}=[\boldsymbol{g}^{(2)},\boldsymbol{g}^{(2)}]=\boldsymbol{g}$$

$$\forall k\in\mathbf{Z}^+,\ \boldsymbol{g}^{(k+1)}=[\boldsymbol{g}^{(k)},\boldsymbol{g}^{(k)}]=\boldsymbol{g}$$

从而 $\boldsymbol{g}$ 不为可解李代数.

方法 2：先证 $\boldsymbol{h}_1$ 不可解

由于

$$[\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_4]=\boldsymbol{L}_6$$

$$[\boldsymbol{L}_3,\boldsymbol{L}_7]=4\boldsymbol{L}_{10}$$

$$[\boldsymbol{L}_{-12},\boldsymbol{L}_{-3}]=9\boldsymbol{L}_{-15}$$

则 $\boldsymbol{L}_6,\boldsymbol{L}_{10},\boldsymbol{L}_{-15}\in[\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_1]$，而 $\boldsymbol{L}_6$、$\boldsymbol{L}_{10}$、$\boldsymbol{L}_{-15}$ 能够生成 $\boldsymbol{h}_1$，故

$$\boldsymbol{h}_1=[\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_1]$$

又

$$\boldsymbol{h}_1^k=\boldsymbol{h}_1$$

从而 $\boldsymbol{h}_1$ 不可解.

反证，如果 $\boldsymbol{g}$ 可解，则 $\boldsymbol{h}_1$ 也可解，出现矛盾.

□

2　结　语

本文研究了扩张 Schrödinger-Virasoro 李代数的有限生成元、李代数的幂零和可解等结构问题. 可以进一步研究这类李代数的中心和理想，及其全部自同构以及自同构群等结构问题. 并可继续研究扩张 Schrödinger-Virasoro 李代数的表示.

参考文献：

[1] GAO Shoulan, JIANG Cuibo, PEI Yufeng.

Structure of the extended Schrödinger-Virasoro Lie algebra (sb) over-tilde [J]. **Algebra Colloquium**, 2009, **16**(4): 549-566.

[2] TAN Shaobin, ZHANG Xiufu. Automorphisms and Verma moudules for generalized Schrödinger-Virasoro algebras [J]. **Journal of Algebra**, 2009, **322**: 1379-1394.

[3] 余德民，梅超群. 一类无限维半单李代数[J]. 系统科学与数学，2008，**28**(9)：1101-1108.
YU Demin, MEI Chaoqun. A class of semi-simple Lie algebra [J]. **Journal of Systems Science and Mathematical Science**, 2008, **28**(9): 1101-1108. (in Chinese)

[4] 余德民，卢才辉. 李代数 $L(Z,f,\delta)$ 的特殊性质[J]. 数学进展，2006，**35**(6)：707-711.
YU Demin, LU Caihui. Special property of Lie algebra $L(Z,f,\delta)$ [J]. **Advances in Mathematics**, 2006, **35**(6): 707-711. (in Chinese)

[5] 余德民，卢才辉. Virasoro 李代数的子代数若干结果[J]. 数学学报，2006，**49**(3)：633-638.
YU Demin, LU Caihui. Results of Virasoro subalgebra [J]. **Acta Mathematica Sinica**, 2006, **49**(3): 633-638. (in Chinese)

[6] 余德民，卢才辉. Virasoro 李代数的子代数间的同构及生成元[J]. 系统科学与数学，2008，**28**(1)：24-29.
YU Demin, LU Caihui. Isomorphism and generating sets of subalgebras of the Virasoro algebra [J]. **Journal of Systems Science and Mathematics Science**, 2008, **28** (1): 24-29. (in Chinese)

[7] 余德民，梅超群，郭晋云. 一些特殊项链李代数的同态[J]. 数学年刊，2009，**30**(4)：551-562.
YU Demin, MEI Chaoqun, GUO Jinyun. Homorphisms of some special necklace Lie algebras [J]. **Chinese Annals of Mathematics**, 2009, **30**(4): 551-562. (in Chinese)

[8] XIA Chunguang, YOU Taijie, ZHOU Liji. Structure of a class of Lie algebras of Block type [J]. **Communications in Algebra**, 2012, **40**(8): 3113-3126.

[9] XIA Chunguang, WANG Wei. Derations and automorphisms of a Lie algebra of Block type [J]. **Algebra Colloquium**, 2013, **20**: 173-180.

[10] XIA Chunguang, ZHANG Ruibin. Unitary highest weight modules over Block type Lie algebras $B(q)$ [J]. **Journal of Lie Algebra**, 2013, **23**: 159-176.

Generators of subalgebras of extended Lie algebra Schrödinger-Virasoro and nilpotency of some Lie subalgebras

YU Demin*, CHAI Jialu, LI Di, LUO Deren, WU Weicai, JIANG Chan

(College of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414000, China)

Abstract: The generators of subalgebras of the extended infinite dimensional Lie algebra Schrödinger-Virasoro are studied. It is proved that neither the Lie subalgebra $\boldsymbol{h}_2$ nor the quotient Lie algebra $\boldsymbol{h}_5/\boldsymbol{h}_2$ has finite generators. The Lie algebra Schrödinger-Virasoro has finite generators and the generators can be 5. Finally, it is proved that the Lie subalgebra $\boldsymbol{h}_5$ is a nilpotent subalgebra.

Key words: Lie algebra; isomorphisms; subalgebra