

文章编号: 1000-8608(2022)02-0206-07

切换正系统稳定性及 l_1 增益性能分析

刘教*, 孔祥娜, 康乐

(河北工业大学 人工智能与数据科学学院, 天津 300401)

摘要: 研究一类切换正系统, 其中包括稳定及不稳定子系统, 分别将其运行区间看作 τ 部分与 T 部分, 建立持续驻留时间切换正系统模型。基于此, 结合多余正 Lyapunov 函数方法建立系统稳定性判据并获得持续驻留时间具体数值, 降低已有平均驻留时间结果的保守性。此外, 在持续驻留时间切换条件下通过累积计算每个阶段切换次数上限的方法, 进一步分析切换正系统的 l_1 增益性能并计算出 l_1 增益。所获得条件均为标准线性规划形式, 方便在 Matlab 中利用 Linprog 函数求解。最后, 通过数值仿真验证了所提方法的可行性。

关键词: 切换正系统; 持续驻留时间; 稳定性; l_1 增益性能

中图分类号: TP273

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb202202013

0 引言

切换正系统是由一组正子系统以及某种逻辑切换法则组成的特殊混杂系统^[1]。由于应用范围广、设计算法易实现等优点, 切换正系统成为控制领域研究的热门课题。具体到实际应用中, 切换正系统可用来建立人类免疫缺陷病毒突变模型^[2]以及刻画分岔路交通控制系统^[3]等。但切换正系统兼具子系统之间切换特性及变量非负特性使得对其研究非常困难。

其一, 子系统之间切换特性对系统稳定性分析至关重要, 切换特性的不同导致系统动态特性存在差异。一般情况下, 实际系统需使用多个模态进行描绘^[4], 例如在电路系统中, 切换特性更多地体现在开关处, 即切换可能会导致系统模态的变化, 进而导致系统稳定性变化。在所研究的切换系统中, 构造合适的切换策略才能使得整个切换系统稳定^[5]。

其二, 变量非负特性是切换正系统区别于普通切换系统的额外性质, 因此会导致许多现有研究成果过于保守甚至不能直接使用。从 20 世纪后期至今, 对系统非负特性的研究从未中断, 生物

学、经济学、医学等学科中均有涉猎, 具体可参考文献[6-9]。与一般切换系统不同, 针对切换正系统提出余正 Lyapunov 函数方法进行稳定性分析, 能够充分利用变量非负特性, 降低保守性。

对于切换正系统稳定性分析问题, 结合切换系统理论及正系统理论, 通常运用共同余正 Lyapunov 函数和多余正 Lyapunov 函数方法进行研究。前者用于系统在任意切换下的稳定性分析。但在具体实践中, 不可能总是确保切换系统的所有子系统都渐近稳定并共享一个 Lyapunov 函数, 故此方法研究受约束切换情形具有局限性, 转而使用多余正 Lyapunov 函数方法更为合理。对多余正 Lyapunov 函数方法的具体应用可参考文献[10-11]。

在受约束的切换信号下, 切换系统的稳定性研究主要包括依时间、依状态或者两者兼存在。但在实际应用中, 依状态的切换系统运行成本过高且只适用于状态可测量的系统, 故而更多的研究是基于依时间的研究上。依时间的切换策略具体为驻留时间、平均驻留时间以及持续驻留时间。驻留时间策略要求两个相邻切换点之间的运行时间

收稿日期: 2021-06-02; 修回日期: 2022-01-16。

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目(62103129); 河北省创新能力提升计划资助项目(18961604H)。

作者简介: 刘教*(1987-), 女, 讲师, 硕士生导师, E-mail:jiaoliu@hebut.edu.cn。

大于驻留时间,文献[12]采用驻留时间策略分析了连续时间切换系统的稳定性.平均驻留时间策略比驻留时间策略更为普遍,允许系统在必要时快速切换,稍后以低速切换进行补偿.文献[13]应用平均驻留时间策略对线性切换系统进行稳定性分析.持续驻留时间策略比驻留时间策略与平均驻留时间策略更具有普遍性,将其区间长度进行某种限制与变化,可得到驻留时间及平均驻留时间策略均为持续驻留时间策略更为独特的情形.

已有研究大多假设所有子系统均稳定,但在具体实践中,系统不可能总是稳定的,故含有不稳定子系统的切换系统也值得深入研究.文献[14]首次对含有不稳定子系统的切换正系统进行稳定性分析.但其平均驻留时间策略要求子系统驻留时间的平均值要大于一个特定的下界,这在某些具体实践应用中不易实现.特别是限制其不稳定子系统平均驻留时间下界导致结果比较保守并且不合理,采用持续驻留时间策略研究含有不稳定子系统的切换系统更为合理.

由 l_2 范数诱导的 l_2 增益性能可描述外部扰动对系统输出的影响.而对于切换正系统,运用 l_1 范数诱导的 l_1 增益描述扰动对系统输出的影响更为合理.例如文献[15]讨论了周期分段切换正系统的稳定性和 l_1 增益性能.文献[16]运用余正Lyapunov函数方法研究了在驻留时间策略下切换正系统的渐近稳定特性以及 l_1 增益性能分析.尽管 l_1 增益特征的重要性已经被广泛认知,但带有不稳定子系统的切换正系统的 l_1 增益相关研究却很少被注意到,尤其是运用持续驻留时间策略,本文有意解决此问题.

受上述讨论启发,本文研究含有不稳定子系统的切换正系统的渐近稳定及 l_1 增益性能问题.利用持续驻留时间策略对稳定子系统与不稳定子系统之间的切换关系进行建模,其中该切换系统的不稳定部分允许任意切换.在此基础上建立使得系统稳定的判据并计算出未加权的 l_1 增益.

符号标记: \mathbf{R}_+^n 表示所有非负实向量空间集合. $\mathbf{A} > \mathbf{0} (< \mathbf{0})$ 意味着矩阵 \mathbf{A} 的所有元素都为正(负). \mathbf{R}_+ 表示非负实数集. $\|\mathbf{x}\|$ 表示 l_1 -范数.定义 $\mathbf{1} = (1 \ 1 \ \cdots \ 1)^T$.

1 问题描述和预备知识

考虑如下离散时间系统:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_{\sigma(k)} \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_{\sigma(k)} \boldsymbol{\omega}(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{D}_{\sigma(k)} \mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_{\sigma(k)} \boldsymbol{\omega}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}_+^n$ 为系统状态且初始状态 $\mathbf{x}(k_0) > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}(k) \in \mathbf{R}_+^n$ 为扰动输入,且满足 $\int_0^\infty \|\boldsymbol{\omega}(k)\| dt < +\infty$, $\mathbf{z}(k) \in \mathbf{R}^q$ 为系统输出, $\sigma(k): [0, \infty) \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$ 为依时间的切换信号, m 是子系统的个数.为确保系统(1)为正系统,所有系数矩阵均为具有相容维数的常值矩阵且满足 $\mathbf{A}_i > \mathbf{0}, \mathbf{G}_i > \mathbf{0}, \mathbf{D}_i > \mathbf{0}, \mathbf{E}_i > \mathbf{0}$.不失一般性,假定当 $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ 时,第 i 个子系统稳定;当 $i \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$ 时,第 i 个子系统不稳定.

定义 1^[16] 在切换系统(1)中对于任意切换信号 $\sigma(k)$,给定常值 τ 与 T .若存在大于等于 τ 的时间间隔且间隔 T 内系统 $\sigma(k)$ 取值唯一,连续两个这样的时间间隔被不超过 T 的间隔分开,则 τ 称作持续驻留时间,而 T 称作持续周期.

注 1 本文在持续驻留时间的切换规则下,时间区间可分为多个阶段,每一个阶段包含两个部分: τ_p 部分和 T_p 部分.对切换正系统(1),稳定子系统的运行区间被看作 τ_p 部分,不稳定子系统的运行区间被看作 T_p 部分.在 T_p 部分内允许任意切换但是 T_p 部分的长度不会超过常值 T .

如图1所示,将系统整个运行区间看作多个阶段.区间 $[k_p, k_{p+1})$ 代表第 p 个阶段,其中 k_p^l 表示切换瞬间, $l = \{0, 1, \dots, n\}$, $k_p = k_p^0$ 且 $k_p^0, k_p^1, k_p^2, \dots, k_p^n$ 为不稳定子系统的切换瞬间,第 p 个阶

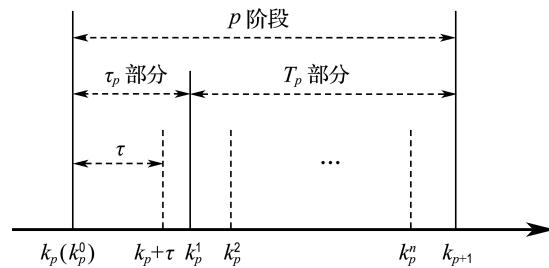


图1 持续驻留时间切换时序图

Fig. 1 The sequence diagram of persistent dwell time switching

段的区间长度为 $\tau_p + T_p$, 其中 τ_p 为 τ 部分 $[k_p, k_{p+1})$ 的长度, T_p 为 T 部分 $[k_p, k_{p+1})$ 的长度. 显然, 由定义 1 可知, $\tau_p \geq \tau, T_p \leq T$.

定义 2^[17] 对于切换系统(1), 在给定的切换信号下如果下述条件成立:

(1) 当 $\omega(k) \equiv \mathbf{0}$ 时, 切换系统(1)全局一致渐近稳定;

(2) 当 $\omega(k) \neq \mathbf{0}$ 时, 在零初始条件下, 满足如下不等式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|z(k)\| \leq \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \|\omega(k)\| \quad (2)$$

则称切换系统(1)全局一致渐近稳定且具有 l_1 增益 γ .

2 主要内容

本章给出保证含有不稳定子系统的切换正系统的稳定性及 l_1 增益性能的充分条件, 并计算持续驻留时间切换条件. 接下来进行 $\omega(k) \equiv \mathbf{0}$ 时的稳定性分析, 得到如下定理.

定理 1 当 $\omega(k) \equiv \mathbf{0}$ 时, 给定常量 $\mu > 1$, $0 < \alpha < 1, \beta > 1$ 时, 如果存在一组向量 $\mathbf{v}_i > \mathbf{0}$, 使得对于 $\forall i, j \in M$ 下列不等式满足

$$\mathbf{v}_i - \mu \mathbf{v}_j < \mathbf{0}; \quad i \neq j \quad (3)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{v}_i - \alpha \mathbf{v}_i < \mathbf{0}; \quad 1 \leq i \leq r \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{v}_i - \beta \mathbf{v}_i < \mathbf{0}; \quad r+1 \leq i \leq m \quad (5)$$

那么切换系统(1)在持续驻留时间满足

$$\tau > \tau_p = \frac{T \ln \beta + (T+1) \ln \mu}{-\ln \alpha} \quad (6)$$

的切换信号下全局一致渐近稳定.

证明 针对切换系统(1)构造多余正 Lyapunov 函数

$$V_{\sigma(k)}(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{v}_{\sigma(k)} \quad (7)$$

对于 $\forall i, j \in M, i \neq j$, 由式(3)以及状态非负性可得, 在切换点处,

$$V_i(\mathbf{x}(k_p^l)) < \mu V_j(\mathbf{x}(k_p^l - 1)) \quad (8)$$

在 τ 部分 $[k_p, k_{p+1})$, 由式(4)可得

$$V_i(\mathbf{x}(k+1)) < \alpha V_i(\mathbf{x}(k)) \quad (9)$$

在 T 部分 $[k_p^1, k_{p+1})$, 由式(5)可得

$$V_i(\mathbf{x}(k+1)) < \beta V_i(\mathbf{x}(k)) \quad (10)$$

考虑 τ 部分只有一个稳定子系统运行, T 部分有

不稳定子系统运行且允许任意切换, 结合式(7)~(10)可得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k_{p+1})}(\mathbf{x}(k_{p+1})) &\leq \\ \mu \beta^{k_{p+1}-k_p^n} V_{\sigma(k_p^n)}(\mathbf{x}(k_p^n)) &\leq \\ \mu \beta^{k_{p+1}-k_p^n} [\mu \beta^{k_p^n-k_p^{n-1}} V_{\sigma(k_p^{n-1})}(\mathbf{x}(k_p^{n-1}))] &\leq \dots \leq \\ \mu^{N(k_p^1, k_{p+1})} \beta^{k_{p+1}-k_p^1} V_{\sigma(k_p^1)}(\mathbf{x}(k_p^1)) &\leq \\ \mu^{N(k_p^1, k_{p+1})} \beta^{k_{p+1}-k_p^1} \mu \alpha^{k_p^1-k_p} V_{\sigma(k_p)}(\mathbf{x}(k_p)) &\leq \\ \mu^{T_p+1} \alpha^{T_p} \beta^{T_p} V_{\sigma(k_p)}(\mathbf{x}(k_p)) \end{aligned}$$

因为 $\tau_p \geq \tau, T_p \leq T$, 可得

$$V_{\sigma(k_{p+1})}(\mathbf{x}(k_{p+1})) \leq \eta V_{\sigma(k_p)}(\mathbf{x}(k_p)) \quad (11)$$

其中 $\mu^{T+1} \alpha^T \beta^T = \eta$. 由式(11)容易得

$$V_{\sigma(k_p)}(\mathbf{x}(k_p)) \leq \eta^p V_{\sigma(k_0)}(\mathbf{x}(k_0)) \quad (12)$$

对于 $\forall k \in [k_p, k_{p+1})$ 可得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k)}(\mathbf{x}(k)) &\leq \eta V_{\sigma(k_p)}(\mathbf{x}(k_p)) \leq \eta^p V_{\sigma(k_0)}(\mathbf{x}(k_0)) \\ (13) \end{aligned}$$

由于

$$V_{\sigma(k)}(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{v}_{\sigma(k)} \geq \epsilon_2 \|\mathbf{x}(k)\| \quad (14)$$

$$V_{\sigma(k_0)}(\mathbf{x}(k_0)) = \mathbf{x}^T(k_0) \mathbf{v}_{\sigma(k_0)} \leq \epsilon_1 \|\mathbf{x}(k_0)\| \quad (15)$$

其中 $\epsilon_2 = \min\{\nu_i\}$, $\epsilon_1 = \max\{\nu_i\}$, 那么

$$\mathbf{x}(k) \leq \lambda \eta^{p+1} V_{\sigma(k_0)}(\mathbf{x}(k_0)) \quad (16)$$

其中 $\lambda = \epsilon_1 / \epsilon_2$. 根据定义 1, 由式(16)得切换系统(1)全局一致渐近稳定, 定理得证.

注 2 定理 1 中, 参数 α 代表稳定子系统的最小稳定裕度; 参数 β 代表所有不稳定子系统的最大不稳定度; 参数 μ 代表切换前后 Lyapunov 函数值之间的关系. 在仿真中, 首先确定参数 α, β 和 μ 保证定理 1 中式(3)~(5)成立, 进而为了获得较小的持续驻留时间对参数值再进行修正.

注 3 对于普通系统的稳定性可构造二次型 Lyapunov 函数方法进行研究, 即只要满足 Lyapunov 函数在全状态域内均收敛就可保证稳定性. 但对于切换正系统来说, 由于状态正性约束, 仅需要保证 Lyapunov 函数在非负象限的收敛即可获得稳定性结果. 此时若依然选用二次型 Lyapunov 函数会导致结果的保守性, 因此需要寻找新的研究方法体系. 本文构造余正 Lyapunov 函数, 此前关于二次型 Lyapunov 函数方法体系中的线性矩阵不等式等理论均不再适用, 这造成切换正系统稳定性研究的困难.

定理2 针对切换系统(1), 给定常量 $\mu > 1$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, 如果存在切换向量 $\mathbf{v}_i > \mathbf{0}$, $i \in M$, $\gamma > 0$, 使得式(3)及下列不等式满足

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{v}_i - \alpha \mathbf{v}_i + \mathbf{D}_i^T \mathbf{1} < \mathbf{0}; \quad 1 \leq i \leq r \quad (17)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{v}_i - \beta \mathbf{v}_i + \mathbf{D}_i^T \mathbf{1} < \mathbf{0}; \quad r+1 \leq i \leq m \quad (18)$$

$$\mathbf{G}_i^T \mathbf{v}_i + \mathbf{E}_i^T \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1} < \mathbf{0}; \quad i \in M \quad (19)$$

那么在持续驻留时间满足式(6)的切换信号下切换系统(1)全局一致渐近稳定且具有 l_1 增益 $\gamma_1 = \gamma\gamma$, 其中

$$\varphi = \mu^{T+1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^T \frac{1-\alpha}{1-\eta^{\frac{1}{T+\tau}}}$$

证明 $\boldsymbol{\omega}(k) \equiv \mathbf{0}$ 时, 若式(17)、(18)成立, 则式(4)、(5)成立. 通过定理1可得, 切换系统(1)全局一致渐近稳定. 下面考虑 $\boldsymbol{\omega}(k) \neq \mathbf{0}$ 的情况. 对于 $1 \leq i \leq r$, 即稳定子系统运行时, 由式(7)得

$$V_i(\mathbf{x}(k+1)) - \alpha V_i(\mathbf{x}(k)) + \|\mathbf{z}(k)\| - \gamma \|\boldsymbol{\omega}(k)\| \leq \\ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{v}_i - \alpha \mathbf{x}^T(k) \mathbf{v}_i + \mathbf{x}^T(k) \mathbf{D}_i^T \mathbf{1} + \boldsymbol{\omega}^T(k) \mathbf{E}_i^T \mathbf{1} - \\ \gamma \boldsymbol{\omega}^T(k) \mathbf{1} \leq \mathbf{x}^T(k) (\mathbf{A}_i^T \mathbf{v}_i - \alpha \mathbf{v}_i + \mathbf{D}_i^T \mathbf{1}) + \\ \boldsymbol{\omega}^T(k) (\mathbf{G}_i^T \mathbf{v}_i + \mathbf{E}_i^T \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1}) \quad (20)$$

由式(17)、(19)和(20)可得

$$V_i(\mathbf{x}(k+1)) - \alpha V_i(\mathbf{x}(k)) \leq -\|\mathbf{z}(k)\| + \\ \gamma \|\boldsymbol{\omega}(k)\| \quad (21)$$

采取同样的方式, 对于 $r+1 \leq i \leq m$, 即不稳定子系统运行时有

$$V_i(\mathbf{x}(k+1)) - \beta V_i(\mathbf{x}(k)) + \|\mathbf{z}(k)\| - \gamma \|\boldsymbol{\omega}(k)\| \leq \\ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{v}_i - \beta \mathbf{x}^T(k) \mathbf{v}_i + \mathbf{x}^T(k) \mathbf{D}_i^T \mathbf{1} + \boldsymbol{\omega}^T(k) \mathbf{E}_i^T \mathbf{1} - \\ \gamma \boldsymbol{\omega}^T(k) \mathbf{1} \leq \mathbf{x}^T(k) (\mathbf{A}_i^T \mathbf{v}_i - \beta \mathbf{v}_i + \mathbf{D}_i^T \mathbf{1}) + \\ \boldsymbol{\omega}^T(k) (\mathbf{G}_i^T \mathbf{v}_i + \mathbf{E}_i^T \mathbf{1} - \gamma \mathbf{1}) \quad (22)$$

由式(18)、(19)和(22)可得

$$V_i(\mathbf{x}(k+1)) - \beta V_i(\mathbf{x}(k)) \leq -\|\mathbf{z}(k)\| + \\ \gamma \|\boldsymbol{\omega}(k)\| \quad (23)$$

定义 $\Lambda(k) = \|\mathbf{z}(k)\| - \gamma \|\boldsymbol{\omega}(k)\|$. 因此, 针对 p 阶段, 由式(3)、(21)及(23)可得

$$V_{\sigma(k_p+1)}(\mathbf{x}(k_p+1)) \leq \\ \mu [\beta V_{\sigma(k_p^n)}(\mathbf{x}(k_p^n)) - \Lambda(k_p^n)] \leq \\ \mu [\beta \mu \beta V_{\sigma(k_p^{n-1})}(\mathbf{x}(k_p^{n-1})) - \\ \mu \Lambda(k_p^{n-1})] - \mu \Lambda(k_p^n) \leq \dots \leq \\ (\mu \beta)^{N(k_p^1, k_p+1)} V_{\sigma(k_p^1)}(\mathbf{x}(k_p^1)) - \\ \sum_{l=k_p^1}^{k_p+1-1} \mu^{N(l, k_p+1)} \beta^{N(l, k_p+1-1)} \Lambda(l) \leq$$

$$(\mu \beta)^{N(k_p^1, k_p+1)} [\alpha V_{\sigma(\tau_n)}(\mathbf{x}(\tau_n)) - \Lambda(\tau_n)] - \\ \sum_{l=k_p^1}^{k_p+1-1} \mu^{N(l, k_p+1)} \beta^{N(l, k_p+1-1)} \Lambda(l) \leq \\ (\mu \beta)^{N(k_p^1, k_p+1)} \alpha^{k_p^1 - \tau_p^n} V_{\sigma(\tau_p^n)}(\mathbf{x}(\tau_p^n)) - \\ (\mu \beta)^{N(k_p^1, k_p+1)} \Lambda(\tau_p^n) - \\ \sum_{l=k_p^1}^{k_p+1-1} \mu^{N(l, k_p+1)} \beta^{N(l, k_p+1-1)} \Lambda(l) \leq \dots \leq \\ \mu^{N(k_p, k_p+1)} \beta^{N(k_p^1, k_p+1)} \alpha^{k_p^1 - k_p} V_{\sigma(k_p)}(\mathbf{x}(k_p)) - \\ \sum_{l=k_p}^{k_p+1-1} \mu^{N(l, k_p+1)} \alpha^{k_p^1 - \tau_p^l} \beta^{N(l, k_p+1-1)} \Lambda(l) \leq \dots \leq \\ \mu^{N(k_0, k_p+1)} \alpha^{S_{\downarrow}(k_0, k_p^1)} \beta^{S_{\uparrow}(k_0^1, k_p+1)} V_{\sigma(k_0)}(\mathbf{x}(k_0)) - \\ \sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{N(l, k)} \alpha^{S_{\downarrow}(l, k)} \beta^{S_{\uparrow}(l, k)} \Lambda(l)$$

因此在零初始条件下, 可得

$$\sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{N(l, k)} \alpha^{S_{\downarrow}(l, k)} \beta^{S_{\uparrow}(l, k)} \Lambda(l) \leq 0 \quad (24)$$

由 $\tau_p \geq \tau$, $T_p \leq T$ 可得 $(\tau-1)(T_p - T) \leq 0$, 即

$$\tau T_p \leq T\tau + T_p - T \quad (25)$$

假设 $[l, k]$ 在 p 阶段, 有

$$\frac{k-l}{T_p + \tau} (T_p + 1)(T_p + \tau)(T + \tau) = \\ (k-l)(T_p + 1)(T + \tau) = \\ (k-l)(T_p T + T_p \tau + T + \tau) < \\ (k-l)(T_p T + T \tau + T_p + \tau) \quad (26)$$

且

$$\frac{k-l}{T + \tau} (T + 1)(T_p + \tau)(T + \tau) = \\ (k-l)(T + 1)(T_p + \tau) = \\ (k-l)(T_p T + T \tau + T_p + \tau) \quad (27)$$

因此

$$\frac{k-l}{T_p + \tau} (T_p + 1)(T_p + \tau)(T + \tau) = \\ \frac{k-l}{T + \tau} (T + 1)(T_p + \tau)(T + \tau)$$

上式两边均除以 $(T_p + \tau)(T + \tau)$, 得

$$\frac{k-l}{T_p + \tau} (T_p + 1) < \frac{k-l}{T + \tau} (T + 1) \quad (28)$$

令 $\psi_p[l, k]$ 表示 p 阶段属于 $[l, k]$ 中的区间, 因此有

$$N(l, k) \leq \sum_{p=1}^n \frac{\psi_p(k, l)}{T_p + \tau_p} (T_p + 1) + (T + 1) \leq$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \frac{\psi_p(k, l)}{T_p + \tau} (T_p + 1) + (T + 1) &\leqslant \\ \sum_{p=1}^n \frac{\psi_p(k, l)}{T + \tau} (T + 1) + (T + 1) &\leqslant \\ \left(\frac{k-l}{T+\tau} + 1 \right) (T + 1) \end{aligned} \quad (29)$$

假设 $[l, k)$ 存在 n 个完整的阶段, $[l, k)$ 中的切换次数满足下述不等式:

$$0 \leqslant N(l, k) \leqslant \left(\frac{k-l}{T+\tau} + 1 \right) (T + 1) \quad (30)$$

$$0 \leqslant S_{\downarrow}(l, k) \leqslant \left(\frac{k-l}{T+\tau} + 1 \right) T \quad (31)$$

结合式(30)、(31)可得

$$\begin{aligned} \sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{N(l, k)} \alpha^{S_{\downarrow}(l, k)} \beta^{S_{\uparrow}(l, k)} \|z(k)\| &\leqslant \\ \gamma \sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{\left(\frac{k-l}{T+\tau} + 1 \right) (T+1)} \alpha^{S_{\downarrow}(l, k) + S_{\uparrow}(l, k)} \times \\ \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{S_{\uparrow}(l, k)} \|\omega(k)\| &\leqslant \\ \gamma \mu^{T+1} \sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{\left(\frac{k-l}{T+\tau} \right) (T+1)} \alpha^{k-l} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\left(\frac{k-l}{T+\tau} + 1 \right) T} \|\omega(k)\| &\leqslant \\ \gamma \mu^{T+1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^T \sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{\left(\frac{k-l}{T+\tau} \right) (T+1)} \times \\ \alpha^{k-l} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\left(\frac{k-l}{T+\tau} \right) T} \|\omega(k)\| &\leqslant \\ \gamma \mu^{T+1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^T \sum_{l=k_0}^{k-1} \left[\mu^{\frac{T+1}{T+\tau}} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{T}{T+\tau}} \alpha \right]^{k-l} \|\omega(k)\| &\leqslant \\ \gamma \mu^{T+1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^T \sum_{l=k_0}^{k-1} \left(\eta^{\frac{1}{T+\tau}} \right)^{k-l} \|\omega(k)\| \end{aligned} \quad (32)$$

由式(6)可得

$$\eta^{\frac{1}{T+\tau}} < 1 \quad (33)$$

由式(32)、(33)可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{l=k_0}^{k-1} \alpha^{k-l} \|z(k)\| &\leqslant \\ \gamma \mu^{T+1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^T \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{l=k_0}^{k-1} (\eta^{\frac{1}{T+\tau}})^{k-l} \|\omega(k)\| \end{aligned}$$

变换积分区间得

$$\begin{aligned} \sum_{l=k_0}^{\infty} \sum_{k=l+1}^{\infty} \alpha^{k-l} \|z(k)\| &\leqslant \\ \gamma \mu^{T+1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^T \sum_{l=k_0}^{\infty} \sum_{k=l+1}^{\infty} \eta^{k-l} \|\omega(k)\| \end{aligned} \quad (34)$$

运用代数运算和几何级数的求和公式, 可得

$$\sum_{l=k_0}^{\infty} \|z(k)\| \leqslant \gamma_1 \sum_{l=k_0}^{\infty} \|\omega(k)\| \quad (35)$$

其中

$$\psi = \mu^{T+1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^T \frac{1-\alpha}{1-\eta^{\frac{1}{T+\tau}}}, \gamma_1 = \psi \gamma$$

综上所述, 根据定义 2, 可得切换系统(1)全局一致渐近稳定且具有 l_1 增益, 定理得证.

3 数值算例

考虑如下 3 个二阶离散切换正系统及对应的系数矩阵:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.8 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1 = (0.1 \quad 0.3), \quad \mathbf{D}_2 = (0.4 \quad 0.2),$$

$$\mathbf{D}_3 = (0.3 \quad 0.3)$$

$$\mathbf{G}_1 = (0.2 \quad 0.1), \quad \mathbf{G}_2 = (0.1 \quad 0.2),$$

$$\mathbf{G}_3 = (0.1 \quad 0.1)$$

$$\mathbf{E}_1 = (0.1), \quad \mathbf{E}_2 = (0.2), \quad \mathbf{E}_3 = (0.3)$$

外部扰动选取 $\omega(k) = e^{-0.1k} |\sin 0.2k|$. 由系统参数知第 1 个子系统稳定, 其余系统不稳定. 选择参数 $\alpha = 0.57, \beta = 1.36, \mu = 1.02, T = 6$. 通过式(6)计算得 $\tau = 3.5287$. 选取初始值 $x(0) = (1.2 \quad 0.5)$ 且在时间区间 $[0, 20]$ 内切换信号图如图 2 所示, 稳定子系统区间大于 τ , 不稳定子系统区间被限制在 T 之内, 符合持续驻留时间策略. 在此切换信号下, 切换系统(1)的状态轨迹图如图 3 所示, 可观察到系统稳定, 验证了定理 1 的有效性.

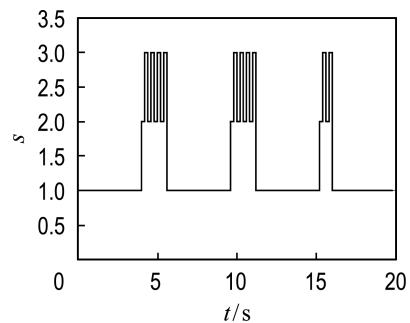


图 2 切换信号图

Fig. 2 The diagram of switching signal

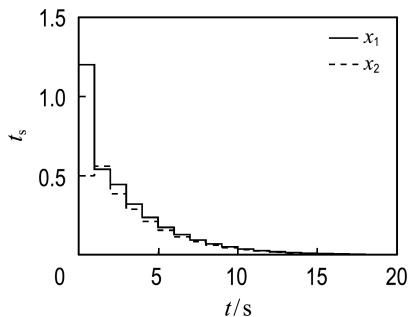
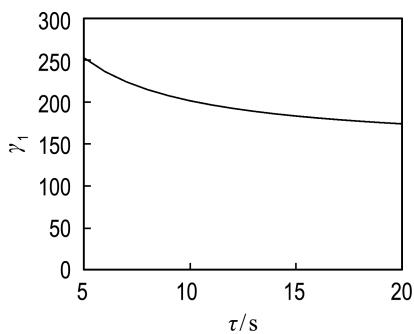


图3 状态轨迹图

Fig. 3 The diagram of state trajectory

存在外部扰动时,系统的 L_1 增益 γ_1 与持续驻留时间的关系如图4所示,容易发现持续驻留时间增大时, L_1 增益呈下降趋势且有下界。

图4 L_1 增益与持续驻留时间关系Fig. 4 Relationship between L_1 -gain and persistent dwell time

4 结语

本文在持续驻留时间策略下分析了包括不稳定子系统的切换正系统的稳定性问题。相较于驻留时间策略与平均驻留时间策略,持续驻留时间策略适用范围更广。同时,通过多余正Lyapunov函数方法给出系统全局一致渐近稳定的充分条件。其次,通过线性规划问题对系统进行增益分析,求解出一个未加权的 L_1 增益。最后,通过对含有一个稳定子系统以及两个不稳定子系统的切换系统进行仿真,验证了所采用方法的有效性。

参考文献:

- [1] 赵颖,付俊,赵军.切换系统的无扰切换控制及其在航空发动机中的应用[J].自动化学报,2020,46(10): 2165-2176.

ZHAO Ying, FU Jun, ZHAO Jun. Bumpless transfer control for switched systems and its application to aero-engines [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(10): 2165-2176. (in Chinese)

- [2] HERNANDEZ-VARGAS E, COLANERI P, MIDDLETON R, et al. Discrete-time control for switched positive systems with application to mitigating viral escape [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(10): 1093-1111.
- [3] XIANG Weiming, LAM J, SHEN Jun. Stability analysis and L_1 -gain characterization for switched positive systems under dwell-time constraint [J]. *Automatica*, 2017, 85: 1-8.
- [4] 连捷,牟春伟,冯智.一类离散切换时滞系统的鲁棒无源控制[J].大连理工大学学报,2013,53(2): 273-280.
LIAN Jie, MU Chunwei, FENG Zhi. Robust passivity control for a class of discrete-time switched delay systems [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2013, 53(2): 273-280. (in Chinese)
- [5] 熊建栋,刘永奇,沈志萍,等.连续线性切换系统的镇定慢切换设计[J].控制与决策,2016,31(5): 797-804.
XIONG Jiandong, LIU Yongqi, SHEN Zhiping, et al. Stabilizing slow-switching strategy for continuous-time switched linear systems [J]. *Control and Decision*, 2016, 31(5): 797-804. (in Chinese)
- [6] 李雅男.基于正系统理论的切换系统稳定性研究[D].济南:济南大学,2017.
LI Yanan. Research on stability of switched systems based on positive system theory [D]. Jinan: University of Jinan, 2017. (in Chinese)
- [7] LEE J W, JO N H, SHIM H, et al. On the stability of critical point for positive systems and its applications to biological systems [J]. *Journal of Electrical Engineering and Technology*, 2013, 8(6): 1530-1541.
- [8] ZHAO Xudong, YIN Yunfei, SHEN Jun. Reset stabilisation of positive linear systems [J]. *International Journal of Systems Science*, 2016,

- 47(12): 2773-2782.
- [9] NVENUTI L, FARINA L. Positive and compartmental systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(2): 370-373.
- [10] ZHAO Xudong, SHI Peng, YIN Yunfei, et al. New results on stability of slowly switched systems: A multiple discontinuous Lyapunov function approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(7): 3502-3509.
- [11] 陈征, 高岩. 切换系统的二类共同 Lyapunov 函数 [J]. 控制与决策, 2013, 28(4): 623-626, 631.
- CHEN Zheng, GAO Yan. Two classes of common Lyapunov functions for switched systems [J]. *Control and Decision*, 2013, 28(4): 623-626, 631. (in Chinese)
- [12] XIONG Junlin, LAM J, SHU Zhan, et al. Stability analysis of continuous-time switched systems with a random switching signal [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(1): 180-186.
- [13] YUAN Chengzhi, WU Fen. Hybrid control for switched linear systems with average dwell time [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(1): 240-245.
- [14] LIAN Jie, LIU Jiao. New results on stability of switched positive systems: An average dwell-time approach [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2013, 7(12): 1651-1658.
- [15] ZHU Bohao, LAM J, SONG Xiaoqi. Stability and L_1 -gain analysis of linear periodic piecewise positive systems [J]. *Automatica*, 2019, 101: 232-240.
- [16] XIANG Mei, XIANG Zhengrong. Finite-time L_1 control for positive switched linear systems with time-varying delay [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, 18(11): 3158-3166.
- [17] ZHANG Lixian, BASIN M, WANG Shun, et al. Reliable finite-time H_∞ filtering for switched linear systems with persistent dwell-time [C]// 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control, CDC 2016. Las Vegas: IEEE, 2016: 6382-6387.

Stability and l_1 -gain performance analysis for switched positive systems

LIU Jiao*, KONG Xiangna, KANG Le

(School of Artificial Intelligence, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: A class of switched positive systems including stable and unstable subsystems are studied. The operation intervals of stable and unstable subsystems are regarded as τ -portion and T -portion respectively, then the switched positive systems model with persistent dwell time switching can be established. On this basis, by using the multiple co-positive Lyapunov functions method, the stability criterion is established and the specific value of persistent dwell time is calculated. Compared to the existing results based on average dwell time method, the conservatism is reduced. Furthermore, under the condition of persistent dwell time switching, the l_1 -gain performance of switched positive system is analyzed and the l_1 -gain is obtained by cumulatively calculating the upper limit of number of switches in each stage. All the above conditions are in the form of standard linear programming, which is convenient to solve by using Linprog function in Matlab. Finally, numerical simulation is presented to verify the feasibility of the proposed method.

Key words: switched positive system; persistent dwell time; stability; l_1 -gain performance