

Shuhan 图分类及其应用

吴伟才, 刘俊吉, 谢卫军*

(湖南理工学院 数学学院, 湖南 岳阳 414006)

摘要: Shuhan 图是一个图论、Kac-Moody 代数和矩阵论等学科的交叉研究对象. 首先给出了 Shuhan 图的定义, 再利用图论的分类方法得到了所有连通的 Shuhan 图: $A_n^{(a)}$ ($n \geq 2$)、 $D_n^{(a)}$ ($n \geq 4$)、 $E_6^{(a)}$ 、 $E_7^{(a)}$ 、 $E_8^{(a)}$, 这证明了连通的非扭单边仿射 Lie 代数对应的 Dynkin 图恰好是全部的最小点数为 1 的连通 Shuhan 图. 进一步地, 由 Shuhan 图的性质可知, 任意 Shuhan 图都是由若干连通 Shuhan 图并在一起的, 这就给出了 Shuhan 图的完整分类.

关键词: 图; 仿射 Lie 代数; Dynkin 图

中图分类号: O157.6

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb202206013

0 引言

图论在数学和数学物理的很多领域, 特别是在代数的分类方面有着广泛的应用. 复数域上的有限维单李代数和 Kac-Moody 代数的分类都可以用 Dynkin 图给出^[1-2]. 在文献 [3-4] 中, Heckenberger 利用广义 Dynkin 图给出了对角型 Nichols 代数对应的算术根系的分类. Wang 等在文献 [5] 中利用带参数的交换图给出了秩 2 的任意域上对角型 Nichols 代数的分类. 在文献 [6-7] 中, Wang 等利用带参数的交换图分类了所有的秩 3、4 的任意域上对角型的有限维 Nichols 代数. 文献 [8] 利用树图给出了有限维单李代数的标准 Lyndon 路. 在 Kac-Moody 代数的研究中, 仿射 Lie 代数分为非扭仿射 Lie 代数和扭仿射 Lie 代数两种, 其中非扭单边仿射 Lie 代数因其对应的广义 Cartan 矩阵是对称矩阵而有良好的性质. 本文证明连通的非扭单边仿射 Lie 代数对应的 Dynkin 图恰好是全部的最小点数为 1 的连通 Shuhan 图.

1 基本定义

令 $I = \{1, 2, \dots, n\}$, 现在回顾一下图论的基本概念^[9]. 令 Γ_1 是一个非空集合且 $\Gamma_2 \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in \Gamma_1, u \neq v\} \subseteq 2^{\Gamma_1}$, 则 $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ 称为一个图; Γ_1 称为图 Γ 的顶点集; Γ_2 称为图 Γ 的边集; 元素 $\{u, v\} \in \Gamma_2$ 称为一条边, 写作 $\lambda_{u,v}$. 如果 $G = (G_1, G_2)$ 是一个图且满足 $G_1 \subseteq \Gamma_1$ 和 $G_2 \subseteq \Gamma_2$, 则 G 称为图 Γ 的子图. 如果 $\emptyset \neq H_1 \subseteq \Gamma_1$ 且 $H_2 = \{\lambda_{u,v} \in \Gamma_2 \mid u, v \in H_1\}$, 则 $H = (H_1, H_2)$ 是一个子图, 称为由图 Γ 中 H_1 生成的子图. $\lambda_{u_m u_{m-1}} \cdots \lambda_{u_3 u_2} \lambda_{u_2 u_1}$ 称为从 u_1 到 u_m 的一条路. 可以定义 Γ_1 上面的等价关系如下: 对任意的 $u, v \in \Gamma_1$, u 和 v 是等价的当且仅当存在一条从 u 到 v 的路或者 $u = v$. Γ_1 的每一个等价类生成的子图都叫做图 Γ 的连通部分.

Shuhan 图是一个满足下列条件的无向图 Γ (只有顶点有标记):

(i) 存在 I 到图 Γ 顶点的双射 φ ;

(ii) 对任意的 $i \in I$, 顶点 $\varphi(i)$ 上标记为 x_i , $x_i \in \mathbf{N}$, \mathbf{N} 为正整数集;

收稿日期: 2021-09-02; 修回日期: 2022-07-25.

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(2020JJ5210).

作者简介: 吴伟才(1984-), 男, 博士, 助理研究员, E-mail: weicaiwu@hnu.edu.cn; 刘俊吉(1997-), 男, 硕士生, E-mail: 13724296482@163.com; 谢卫军*(1980-), 男, 硕士, 副教授, E-mail: 17288232@qq.com.

(iii) 对任意的 $i \neq j \in I, \varphi(i)$ 和 $\varphi(j)$ 之间的边数为 $\lambda_{i,j}$, 这里 $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i} \in \{0, 1\}$;

(iv) 对任意的 $i \in I$, 有 $x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{2} \lambda_{i,j} x_j$.

通俗来讲, Shuhan 图就是任何一个顶点上面的标记恰好是所有与它相连的顶点上面的标记之和的一半的图. Shuhan 图的子图是一个图, 但不一定是 Shuhan 图.

为了表述方便, 本文把顶点上面的标记 a 直接表述成顶点 a , 标记数记成点数.

2 主要结果

首先给出连通 Shuhan 图的分类.

引理 1 假定 $\bullet \text{---} \bullet$ 是 Shuhan 图 Γ 的连通部分, 则

(i) $a \geq \frac{b}{2}, b \geq \frac{a}{2}$.

(ii) 如果 $a < b$, 那么顶点 a 最多可连 2 个顶点.

证明 (i) 是显然的.

(ii) 由图 Γ 的定义, 顶点 a 与另外总点数为 $2a - b$ 的顶点相连, 由 (i) 可知, 新连顶点的点数都要 $\geq \frac{a}{2}$, 由于 $2 \frac{a}{2} > 2a - b$, 故顶点 a 只能再连点数为 $2a - b$ 的顶点 1 个, 得证.

如果没有特殊说明, 下文中图的顶点上最少的点数记为 $a, a \in \mathbb{N}$.

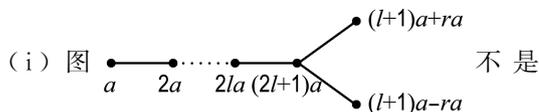
引理 2 假定 $\bullet \text{---} \bullet$ 是 Shuhan 图 Γ 的连通部分. 若 $a \neq b$, 则顶点 a 不能与另外的顶点相连且 $b = 2a$.

证明 由图 Γ 的定义, 若顶点 a 与另外的顶点相连, 则只能连总数为 $2a - b$ 的顶点, 而 $2a - b < a$, 这与 a 是最少的点数矛盾. $b = 2a$ 是显然的. 得证.

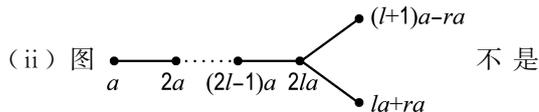
引理 3 假定 $\bullet \text{---} \bullet$ 是连通的 n 个顶点的 Shuhan 图 Γ 的连通部分, 则图 Γ 是一个圈并且 $n \geq 3$.

证明 由图 Γ 的定义, 顶点 a 都必须且只能再与一个点数为 a 的顶点相连, 新连点数为 a 的顶点又必须且只能再与一个点数为 a 的顶点相连, 一直进行下去可得到有 n 个顶点的图: $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet$. 该图中只有两端的顶点 a , 都必须且只能再与一个点数为 a 的顶点相连. 考虑最左端的顶点 a , 由于该图的顶点已经是 n 个, 故顶点 a 不能再连新的顶点, 只能与图中的另外 $n - 1$ 个顶点连线, 由图 Γ 的定义, 位于图中间的 $n - 2$ 个顶点都不能与其他顶点再连线了, 故只能与最右端的顶点 a 连线. 得证.

引理 4 对于 $\forall l \in \mathbb{N}, 0 < r \leq 0.5$.



Shuhan 图的连通部分.



Shuhan 图的连通部分.

证明 (i) 假设 $r = 0.5$. 如果给出的图是 Shuhan 图的连通部分, 则顶点 $(l + 1)a + ra$ 与另外总点数为 $2a$ 的顶点相连, 由引理 1 (i) 可知, 新连顶点的点数不能少于 $\frac{l+1}{2}a + \frac{r}{2}a (> a)$, 故只能连点数为 $2a$ 的 1 个顶点, 再利用引理 1 (i), 知 $l = 1$ 或 2. 如果 $l = 1$, 新得到点数为 $2a$ 的顶点要与总点数为 $1.5a$ 的顶点相连, 由于引理 1 及 a 是最少的点数, 只能连点数为 $1.5a$ 的 1 个顶点, 新连点数为 $1.5a$ 的顶点只能与总点数为 a 的顶点相连, 这与引理 2 矛盾. 如果 $l = 2$, 新得到点数为 $2a$ 的顶点要与总点数为 $0.5a$ 的顶点相连, 这与 a 是最少的点数矛盾. 故 $0 < r < 0.5$. 若给出的图是 Shuhan 图的连通部分, 则点数为 $(l + 1)a - ra$ 的顶点要与另外总点数为 $a - 2ra$ 的顶点相连, 这与 a 是最少的点数矛盾.

(ii) 若给出的图是 Shuhan 图的连通部分, 则点数为 $la + ra$ 的顶点要与总点数为 $2ra$ 的顶点

相连,由于 a 最小,则 $r=0.5$ 且点数为 $la+0.5a$ 的顶点只能与点数为 a 的顶点相连,这与引理 2 矛盾.

引理 5 n 个顶点的单链 $\cdots a_1 \cdots a_2 \cdots a_{n-1} \cdots a_n$ 不

是 Shuhan 图.

证明 由 Shuhan 图的定义, $a_i = ia_1, 1 \leq i \leq n$, 考虑第 n 个顶点的点数,结论是显然的.

引理 6 图 $a \quad 2a \quad 3a \quad 4a \quad 5a \quad 6a \quad 7a$

不是 Shuhan 图的连通部分.

证明 考虑 $\Gamma_{2l+1}: a \quad 2a \quad \cdots \quad 2la \quad (2l+1)a$ 和 $\Gamma_{2(l+1)}: a \quad 2a \quad (2l+1)a \quad 2(l+1)a, 3 \leq i \in \mathbf{N}$.

若 Γ_{2l+1} 是 Shuhan 图的连通部分,则点数为 $(2l+1)a$ 的顶点要与总点数为 $2(l+1)a$ 的顶点相连,且由引理 1(i)可知,新连顶点的点数不能少于 $la+0.5a$,又由引理 4,只有 2 种可能:

(1)与点数为 $(l+1)a$ 的另外 2 个顶点相连,此时新得到点数为 $(l+1)a$ 的顶点都分别要与另外总点数为 a 的顶点相连,由于 $l \geq 3$,与引理 1(i)矛盾.

(2)与点数为 $2(l+1)a$ 的另外 1 个顶点相连,即得到了 $\Gamma_{2(l+1)}$.

若 $\Gamma_{2(l+1)}$ 是 Shuhan 图的连通部分,则点数为 $2(l+1)a$ 的顶点要与另外总点数为 $(2l+3)a$ 的顶点相连,且由引理 1(i)可知,新连顶点的点数不能少于 $(l+1)a$,又由引理 4,只有 2 种可能:

(3)与点数为 $(l+1)a$ 和点数为 $(l+2)a$ 的另外 2 个顶点相连,由引理 1(ii)可知,此时新得到点数为 $(l+2)a$ 的顶点只能与另外总点数为 $2a$ 的一个顶点相连,由于 $l \geq 3$,与引理 1(i)矛盾.

(4)与点数为 $(2l+3)a$ 的另外 1 个顶点相连,即得到 $\Gamma_{2(l+1)+1}$.

用上面的方法归纳得出,若 $\Gamma_k (k \geq 7)$ 是 Shuhan 图的一部分,则最终可以得到一个单链的 Shuhan 图,这与引理 5 矛盾.

定理 1 连通的 Shuhan 图是图 1 中的 1 个

(每种情形都有 $n+1$ 个顶点).

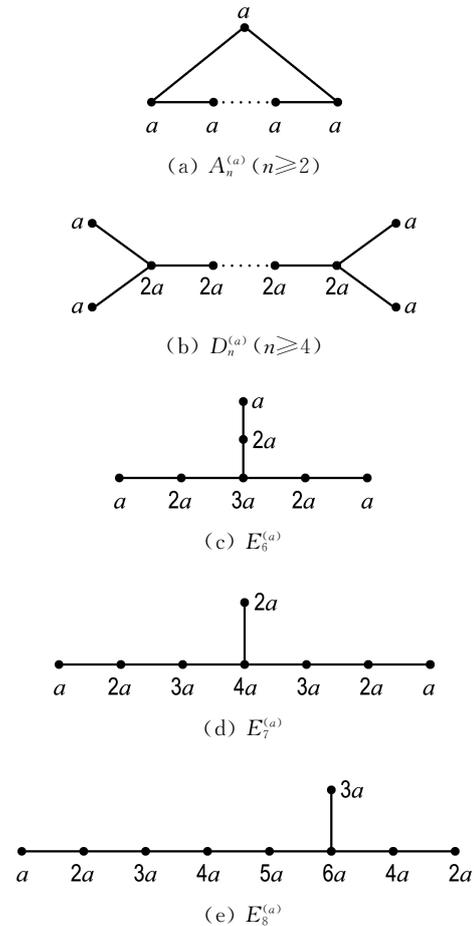


图 1 连通的 Shuhan 图

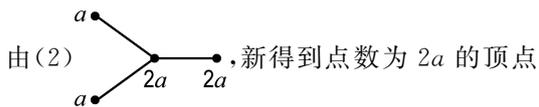
Fig. 1 Connected Shuhan diagrams

证明 考虑 $a \quad b$, 若 $b=a$,由引理 3 得到了 Shuhan 图,即 $A_n^{(a)} (n \geq 2)$. 若 $b > a$,由引理 2,点数为 a 的顶点不能与另外的顶点相连且 $b=2a$. 根据 Shuhan 图的定义,点数为 $2a$ 的顶点要与另外总点数为 $3a$ 的顶点相连.由引理 4,只有 3 种可能:

- (1)与点数为 a 的另外 3 个顶点相连;
- (2)与一个点数为 a 和一个点数为 $2a$ 的另外 2 个顶点相连;
- (3)与点数为 $3a$ 的另外 1 个顶点相连.

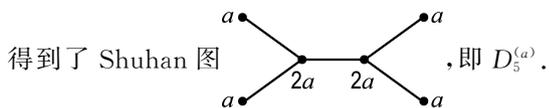
由 (1) ,得到了 Shuhan 图,即

$D_4^{(a)}$.



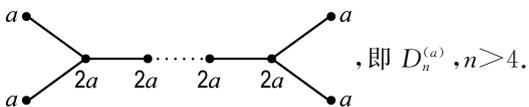
要与另外总点数为 $2a$ 的顶点相连. 只有 2 种可能:

(21)与点数为 a 的另外 2 个顶点相连,此时

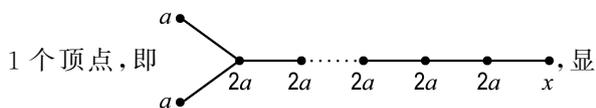
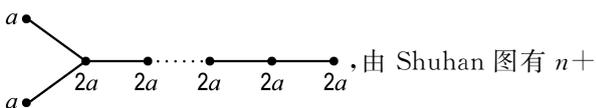


(22)与一个点数为 $2a$ 的另外 1 个顶点相连,新得到点数为 $2a$ 的顶点要与另外总点数为 $2a$ 的顶点相连. 只有 2 种可能...

(22...1) 可以得到 Shuhan 图



(22...2)与一个点数为 $2a$ 的另外 1 个顶点相连,可以得到有 n 个顶点的图



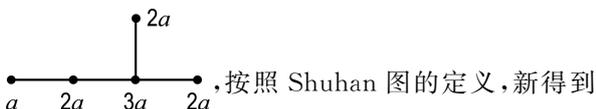
显然不管 x 如何取值,都不能得到 Shuhan 图.

由(3)

新得到点数为 $3a$ 的顶点

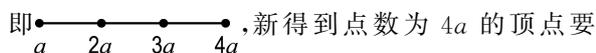
要与另外总点数为 $4a$ 的顶点相连,且由引理 1(i)可知,新连顶点的点数不能少于 $1.5a$. 由引理 4,只有 2 种可能:

(31)与点数为 $2a$ 的另外 2 个顶点相连,即



顶点相连,此时得到了 Shuhan 图,即 $E_6^{(a)}$

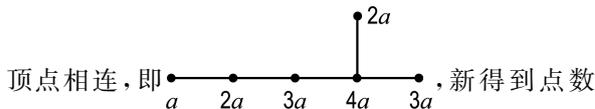
(32)与一个点数为 $4a$ 的另外 1 个顶点相连,



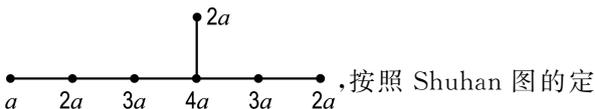
与另外总点数为 $5a$ 的顶点相连,且由引理 1(i)可知,新连顶点的点数不能少于 $2a$. 由引理 4,只有

2 种可能:

(321)与点数为 $2a$ 和点数为 $3a$ 的另外 2 个

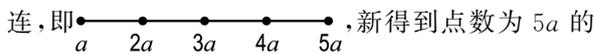


新得到点数为 $2a$ 的顶点不能连另外的顶点,新得到点数为 $3a$ 的顶点要与另外总点数为 $2a$ 的顶点相连,且由引理 1(i)可知新连顶点的点数不能少于 $1.5a$,故只能连点数为 $2a$ 的 1 个顶点,即



一个顶点相连,此时得到了 Shuhan 图,即 $E_7^{(a)}$.

(322)与一个点数为 $5a$ 的另外 1 个顶点相连,

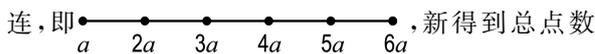


顶点要与另外总点数为 $6a$ 的顶点相连,且由引理 1(i)可知,新连顶点的点数不能少于 $2.5a$. 由引理 4,只有 2 种可能:

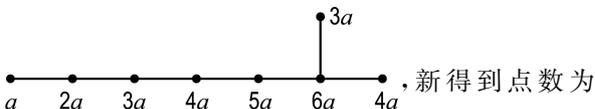
(3221)与点数为 $3a$ 的另外 2 个顶点相连,而

新得到点数为 $3a$ 的两个顶点分别要与另外总点数为 a 的两个顶点相连,这与引理 1(i)矛盾.

(3222)与一个点数为 $6a$ 的另外 1 个顶点相连,



且由引理 1(i)可知,新连顶点的点数不能少于 $3a$. 由引理 4 和引理 6,只有 1 种可能,即与点数为 $3a$ 和点数为 $4a$ 的另外 2 个顶点相连,即



顶点要与另外的未标出的总点数为 $2a$ 的顶点相连,且由引理 1(i)可知,新连的顶点的点数不能少于 $2a$,故只能连点数为 $2a$ 的 1 个顶点,此时得到了 Shuhan 图,即 $E_8^{(a)}$. 得证.

命题 1 (i)连通 Shuhan 图 Γ 连接新的顶点

得到的图不是 Shuhan 图.

(ii)若 Shuhan 图 Γ 的某个子图也是 Shuhan

图,则 Γ 是离散的.

证明 (i)图 Γ 中连接新的顶点的点数一定不满足 Shuhan 图的条件.

(ii)由(i)可得.

由上面的命题可知, $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$,是一个 Shuhan 图当且仅当存在 $m \in \mathbf{N}$ 使得 $G_i = (G_{i1}, G_{i2}), \forall 1 \leq i \leq m$ 都是连通 Shuhan 图且满足 $\Gamma_1 = \bigcup_{i=1}^m G_{i1}, \Gamma_2 = \bigcup_{i=1}^m G_{i2}, G_{j1} \cap G_{k1} = \emptyset, G_{j2} \cap G_{k2} = \emptyset, \forall 1 \leq j \neq k \leq m$,即,所有的 Shuhan 图都是由若干个连通 Shuhan 图并在一起的.

3 结 语

本文研究了 Shuhan 图的分类与应用,得到了 5 种类型的连通 Shuhan 图,研究结果在矩阵论和 Kac-Moody 代数以及图论领域中都有广泛的应用.对于顶点之间边数大于 1 的图,即广义 Shuhan 图,它们的性质和分类也是一个值得探究的问题.

参 考 文 献:

[1] HUMPHREYS J E. **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory** [M]. New York: Springer, 1972.

- [2] KAC V G. **Infinite-dimensional Lie Algebras** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [3] HECKENBERGER I. Nichols algebras of diagonal type and arithmetic root systems [D]. Leipzig: Marburg University, 2005.
- [4] HECKENBERGER I. Classification of arithmetic root systems [J]. **Advances in Mathematics**, 2009, **220**(1): 59-124.
- [5] WANG Jing, HECKENBERGER I. Rank 2 Nichols algebras of diagonal type over fields of positive characteristic [J]. **Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications**, 2015, **11**(11): arxiv: 1407.6817.
- [6] WANG Jing. Rank three Nichols algebras of diagonal type over arbitrary fields [J]. **Israel Journal of Mathematics**, 2017, **1**(218): 1-26.
- [7] WANG Jing. Rank 4 finite-dimensional Nichols algebras of diagonal type in positive characteristic [J]. **Journal of Algebra**, 2020, **559**: 547-579.
- [8] LALCONDE P, RAM A. Standard Lyndon bases of Lie algebra and enveloping algebras [J]. **Transactions of the American Mathematical Society**, 1995, **347**: 1821-1830.
- [9] FRANK H. **Graph Theory** [J]. MA: Addison-Wesley, 1969.

Classification and its application of Shuhan diagram

WU Weicai, LIU Junji, XIE Weijun*

(School of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China)

Abstract: Shuhan diagram is an interdisciplinary research object of graph theory, Kac-Moody algebra and matrix theory. Firstly, Shuhan diagram is defined, and then using the classification method of graph theory, all connected Shuhan diagrams: $A_n^{(a)} (n \geq 2), D_n^{(a)} (n \geq 4), E_6^{(a)}, E_7^{(a)}, E_8^{(a)}$ are obtained, this proves that Dynkin diagram corresponding to the connected non-twisted single-side affine Lie algebra is exactly all connected Shuhan diagram with the minimum number of 1. Furthermore, according to the properties of Shuhan diagrams, any Shuhan diagram is composed of several connected Shuhan diagrams, which gives a complete classification of Shuhan diagrams.

Key words: diagrams; affine Lie algebras; Dynkin diagrams