第62卷第6期
2022年11月

大 连 理 工 大 学 学 报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 62, No. 6
Nov. 2 0 2 2

文章编号:1000-8608(2022)06-0655-06

几个关于1-2有序分拆的恒等式及组合证明

郭 育 红*

(河西学院 数学与统计学院,甘肃 张掖 734000)

摘要: 研究了正整数的两类1-2有序分拆,其中一类是正整数的首、末两端分部量都是1的1-2有序分拆,另一类是正整数的首、末两端分部量至少有一个是2的1-2有序分拆.首先得到了这些有序分拆数与Fibonacci数之间的一些关系式.进而,利用熟知的与Fibonacci数相关的有序分拆恒等式得到了这两类正整数的有序分拆数与分部量是奇数、分部量大于1、分部量是1或者2的有序分拆数之间的一些新的有序分拆恒等式,并给出了这些恒等式的组合双射证明.

关键词: 1-2有序分拆;分部量;Fibonacci数;恒等式;组合证明

中图分类号: O157 **文献标识码:** A **doi:** 10.7511/dllgxb202206014

0 引 言

在整数分拆理论中,MacMahon[1]第一次定义了正整数的有序分拆.即把正整数 n 表示成一些正整数的有序和,其中每一项叫该分拆的分部量.如果不考虑分部量的顺序就是无序分拆.例如,4的有序分拆有4,3+1,1+3,2+2,2+1+1,1+2+1,1+1+2,1+1+1+1或(4),(3,1),(1,3),(2,2),(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2),(1,1,1,1)共8个,而无序分拆有5个:4,3+1,2+2,2+1+1,1+1+1+1.有序分拆的反分拆是把该分拆的分部量的顺序倒过来产生的分拆.例如,(1,1,2)的反分拆就是(2,1,1),它们互为反分拆.分拆 α 的反分拆用 α' 表示.

在经典的分拆理论中,分拆恒等式的研究一直是热点问题之一[1-3].近年来,许多研究者得到了丰富的研究成果[4-9].本课题组也得到了一些关于带约束的有序分拆恒等式[10-16].

通常把正整数 n 的分部量是1或者2的有序分拆称为1-2有序分拆,把正整数 n 的分部量是奇数的有序分拆称为奇有序分拆.

借助于正整数的带约束的有序分拆与特殊数列的关系,能够产生一些有趣的分拆恒等式.比如,正整数 n 的1-2有序分拆数等于正整数 $n+1$ 的奇有序分拆数.寻找分拆恒等式一直是整数分拆理论研究中有趣的内容,但是,获得分拆恒等式或者给出分拆恒等式的组合证明仍然是比较困难的.

本文考察正整数的首、末两端分部量是1或者2的1-2有序分拆,给出这些有序分拆数与Fibonacci数之间的一些关系式,进而,利用熟知的与Fibonacci数相关的有序分拆恒等式得到几个新的有序分拆恒等式,并给出组合双射证明.

1 预备知识

在文献[1]中,MacMahon给出了有序分拆的图表示,称为zig-zag图,类似于无序分拆的Ferres图,即将有序分拆每个分部量 λ_i 依次用含有 λ_i 个点的行来表示,但要求下一行的第一个点与上一行的最后一个点对齐.例如14的有序分拆(6,3,1,2,2)的zig-zag图如图1所示.

图1 Zig-zag图
Fig.1 Zig-zag graph

收稿日期: 2021-10-15; **修回日期:** 2022-09-25.
基金项目: 甘肃省自然科学基金资助项目(21JR7RA552);国家自然科学基金资助项目(11461020).
作者简介: 郭育红*(1970-),女,硕士,教授,E-mail:gyh7001@163.com.

利用有序分拆的 zig-zag 图可得到有序分拆的共轭分拆，即将 zig-zag 图从左向右按照列来读，得到的分拆就是原分拆的共轭分拆. 例如，图1按列读产生的有序分拆(1，1，1，1，1，1，2，1，3，2，1)就是(6，3，1，2，2)的共轭分拆，它们互为共轭. 有序分拆 α 的共轭分拆用 $\bar{\alpha}$ 表示.

文献[6]中给出了关于正整数的分部量带约束的一些有序分拆数与 Fibonacci 数之间的关系式. 所谓 Fibonacci 数是指满足以下条件的数：$F_1=1,F_2=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2},n>2$.

下面以定理的形式给出文献[6]中几个熟知的关系式.

定理1[6] 设正整数 n 的分部量是1或者2的有序分拆数为 $C_{1\text{-}2}(n)$，则

$$C_{1\text{-}2}(n)=F_{n+1};\ n>0$$

其中 F_{n+1} 是第 $n+1$ 个 Fibonacci 数.

定理2[6] 设正整数 n 的分部量是奇数的有序分拆数为 $C_{\mathrm{odd}}(n)$，则

$$C_{\mathrm{odd}}(n)=F_n;\ n>0$$

其中 F_n 是第 n 个 Fibonacci 数.

定理3[6] 设正整数 n 的分部量是大于1的有序分拆数为 $C_{>1}(n)$，则

$$C_{>1}(n)=F_{n-1};\ n>1$$

其中 F_{n-1} 是第 $n-1$ 个 Fibonacci 数.

2 主要结果

首先给出下面与分部量2有关的1-2有序分拆数和 Fibonacci 数的一个关系式.

定理4 设 $C_{1\text{-}2}^2(n)$ 表示正整数 n 的首、末两端的分部量至少有一个是2的1-2有序分拆数，则

$$C_{1\text{-}2}^2(n)=F_n;\ n\geqslant 2$$

其中 F_n 是第 n 个 Fibonacci 数.

下面给出该定理的一个组合证明.

证明 把正整数 n 的首、末两端的分部量至少有一个是2的1-2有序分拆分为下面两类：

(A)左端的分部量是2；

(B)左端的分部量是1.

对于(A)类中的任意一个分拆 $\alpha=(2,a_2,a_3,\cdots,a_k)$，若 $a_k=1$，则直接删掉 $a_k=1$，就得到了 $n-1$ 的首、末两端分部量至少有一个是2，且左端分部量是2的1-2有序分拆；若 $a_k=2$，则把左端的分部量2用1替换，就得到了 $n-1$ 的首、末两端分部量至少有一个是2，且左端分部量不是2的1-2有序分拆. 这样，就得到了 $n-1$ 的首、末两端分部量至少有一个是2的1-2有序分拆. 反之，对于 $n-1$ 的首、末两端分部量至少有一个是2的任意一个1-2有序分拆 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_s)$，其中 b_1、b_s 中至少有一个是2，若 $b_1=2$，则在 β 的右端添上分部量1，就得到分拆 $\gamma=(b_1,b_2,\cdots,b_s,1)$，则 γ 就是 n 的右端分部量是1的相应1-2有序分拆. 若 $b_1=1$，此时 $b_s=2$，用 b_1+1 替换 b_1，得到 $\Delta=(2,b_2,\cdots,b_s)$，则 Δ 就是 n 的右端分部量是2的相应1-2有序分拆. 这样就说明了(A)类中的分拆与 $n-1$ 的首、末两端分部量至少有一个是2的1-2有序分拆是一一对应的.

对于(B)类中的任意一个分拆 $\delta=(1,r_2,r_3,\cdots,r_t)$，此时 $r_t=2$. 若 $r_2\neq 1$，则删掉 δ 左端的分部量1，并用 $r_t-1=1$ 替换 r_t，得到分拆 $\sigma=(r_2,r_3,\cdots,1)$，则 σ 就是 $n-2$ 的首、末两端分部量至少有一个是2，且右端分部量是1的1-2有序分拆；若 $r_2=1$，则删掉 δ 左端的两个分部量“1，1”，得到分拆 $\varphi=(r_3,\cdots,r_t)$ 就是 $n-2$ 的首、末两端分部量至少有一个是2，且右端分部量是2的1-2有序分拆. 这样就得到了 $n-2$ 的首、末两端分部量至少有一个是2的1-2有序分拆. 反之，对于 $n-2$ 的首、末两端分部量至少有一个是2的任意一个1-2有序分拆 $\zeta=(c_1,c_2,\cdots,c_s)$，若 $c_s=1$，此时 $c_1=2$，则在 ζ 的左端添上分部量1，并用 $c_s+1=2$ 替换 c_s，得到分拆 $\eta=(1,c_1,c_2,\cdots,2)$ 是 n 的左端只有一个分部量是1的相应1-2有序分拆. 若 $c_s=2$，就在 ζ 的左端添上两个分部量“1，1”，得到分拆 $\theta=(1,1,c_1,c_2,\cdots,c_s)$，该分拆就是 n 的左端至少有两个分部量是1的相应1-2有序分拆. 这样就说明了(B)类中的分拆与 $n-2$ 的首、末两端分部量至少有一个是2的1-2有序分拆是一一对应的.

即

$$C_{1\text{-}2}^2(n)=C_{1\text{-}2}^2(n-1)+C_{1\text{-}2}^2(n-2)$$

又因为 $C_{1\text{-}2}^2(2)=1,C_{1\text{-}2}^2(3)=2$，所以

$$C_{1\text{-}2}^2(n)=F_n;\ n\geqslant 2$$

故结论成立.

□

由于正整数 n 的1-2有序分拆数等于 F_{n+1}，

利用 Fibonacci 数的性质，得到关于分部量 1 的 1-2有序分拆的一个关系式.

定理 5　设 $C_{1\text{-}2}^{1}$ 表示正整数 n 首、末两端分部量都是 1 的 1-2 有序分拆数，则

$$C_{1\text{-}2}^{1}(n)=F_{n-1}；n\geqslant 2$$

其中 F_{n-1} 是第 $n-1$ 个 Fibonacci 数.

下面给出该关系式的一个组合证明.

证明　把正整数 n 首、末两端分部量都是 1 的 1-2 有序分拆分为下面两类：

(A)第二个分部量是 2，即 $\alpha=(1,2,a_3,\cdots,a_k,1)$；

(B)第二个分部量是 1，即 $\beta=(1,1,c_3,\cdots,c_t,1)$.

对于(A)类中的任意一个分拆 $\alpha=(1,2,a_3,\cdots,a_k,1)$，直接删掉第二个分部量 2 就得到了 $n-2$ 的首、末两端分部量都是 1 的 1-2 有序分拆. 反之，对于 $n-2$ 的首、末两端分部量都是 1 的任意一个 1-2 有序分拆 $\gamma=(1,b_2,\cdots,b_{s-1},1)$，在前两个分部量 1 与 b_2 之间添上分部量 2，得到的分拆 $\delta=(1,2,b_2,\cdots,b_{s-1},1)$，就是 n 的首、末两端分部量都是 1 的相应分拆. 这样就说明了(A)类中的分拆与 $n-2$ 的首、末两端分部量都是 1 的 1-2有序分拆是一一对应的.

对于(B)类中的任意一个分拆 $\beta=(1,1,c_3,\cdots,c_t,1)$，删掉 β 的第一个分部量 1，就得到了 $n-1$ 的首、末两端分部量都是 1 的 1-2 有序分拆. 反之，对于 $n-1$ 的首、末两端分部量都是 1 的任意一个 1-2 有序分拆 $\zeta=(1,c_1,c_2,\cdots,c_{s-1},1)$，在 ζ 的左端添上分部量 1，就得到了 n 的首、末两端分部量都是 1，且左边至少有 2 个分部量 1 的 1-2 有序分拆. 这样就说明了(B)类中的分拆与 $n-1$ 的首、末两端分部量都是 1 的 1-2 有序分拆是一一对应的.

即

$$C_{1\text{-}2}^{1}(n)=C_{1\text{-}2}^{1}(n-1)+C_{1\text{-}2}^{1}(n-2)$$

又因为 $C_{1\text{-}2}^{1}(2)=1,C_{1\text{-}2}^{1}(3)=1$，所以

$$C_{1\text{-}2}^{1}(n)=F_{n-1}；n\geqslant 2$$

故结论成立.

□

进一步考察，得到下面与 Fibonacci 数相关的结果.

定理 6　设 $C_{1\text{-}2}^{1f}(n)$ 表示正整数 n 的首端分部量是 1 的 1-2 有序分拆数，则

$$C_{1\text{-}2}^{1f}(n)=F_n；n\geqslant 1$$

其中 F_n 是第 n 个 Fibonacci 数.

定理 7　设 $C_{1\text{-}2}^{1r}(n)$ 表示正整数 n 的末端分部量是 1 的 1-2 有序分拆数，则

$$C_{1\text{-}2}^{1r}(n)=F_n；n\geqslant 1$$

其中 F_n 是第 n 个 Fibonacci 数.

定理 6 与定理 7 的组合证明类似于定理 5，故证明略.

下面给出定理 6 的一个例子.

例 1　设 $n=6$，则 6 的首端分部量是 1 的1-2 有序分拆有下面 8 个：

(1,2,2,1)，(1,2,1,1,1)，(1,1,2,1,1)，
(1,1,1,2,1)，(1,1,1,1,2)，(1,1,1,1,1,1)，
(1,1,2,2)，(1,2,1,2)

由定理 6 及定理 1～3 可得到下面的有序分拆恒等式.

推论 1　正整数 n 的首端分部量是 1 的 1-2 有序分拆数等于 n 的奇有序分拆数.

推论 2　正整数 n 的首端分部量是 1 的 1-2 有序分拆数等于 $n+1$ 的分部量大于 1 的有序分拆数.

推论 3　正整数 n 的首端分部量是 1 的 1-2 有序分拆数等于 $n-1$ 的 1-2 有序分拆数.

类似地，给出下面的恒等式.

推论 4　正整数 n 的末端分部量是 1 的 1-2 有序分拆数等于 n 的奇有序分拆数.

推论 5　正整数 n 的末端分部量是 1 的 1-2 有序分拆数等于 $n+1$ 的分部量大于 1 的有序分拆数.

推论 6　正整数 n 的末端分部量是 1 的 1-2 有序分拆数等于 $n-1$ 的 1-2 有序分拆数.

下面仅给出推论 6 的一个例子.

例 2　设 $n=6$，则 6 的末端分部量是 1 的 1-2 有序分拆有下面 8 个：

(1,2,2,1)，(1,2,1,1,1)，(2,2,1,1)，
(1,1,2,1,1)，(1,1,1,1,1,1)，(2,1,1,1,1)，
(2,1,2,1)，(1,1,1,2,1)

与 5 的以下 8 个 1-2 有序分拆一一对应：

(1,2,2)，(1,2,1,1)，(2,2,1)，(1,1,2,1)，
(1,1,1,1,1)，(2,1,1,1)，(2,1,2)，
(1,1,1,2)

结合定理3和定理5,易得下面的有序分拆恒等式.

定理8 正整数n的首、末两端的分部量都是1的1-2有序分拆数等于n的分部量大于1的有序分拆数.

利用有序分拆的共轭易知两类分拆之间存在一一对应关系,证明略.

由定理4和定理2可得到下面的恒等式.

定理9 正整数n的首、末两端分部量至少有一个是2的1-2有序分拆数等于n的奇有序分拆数.

下面给出该定理的一个组合证明.

证明 对于正整数n的首、末两端分部量至少有一个是2的任意一个1-2有序分拆$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$,若$a_1=1$,此时$a_k=2$,在$\alpha$中,按照从左向右的顺序,将分部量1和其右边相邻的所有分部量2相加,产生的和作为新的分部量,这样得到的分拆就是n的左端分部量是1,右端分部量大于1的奇有序分拆.反之,对于n的右端分部量大于1的任意一个奇有序分拆,将大于1的奇分部量分拆成"1,2,2,…,2"的形式,就得到n的左端分部量是1,右端分部量是2的1-2有序分拆.

在α中,当$a_1=2$时,分两种情形来讨论:

(a)右端的分部量$a_k=1$;

(b)右端的分部量$a_k=2$.

对于情形(a)中的任意一个分拆$\beta=(2,a_2,\cdots,a_{k-1},1)$,首先将左端的分部量2分拆成"1,1",得到分拆$\gamma=(1,1,a_2,\cdots,a_{k-1},1)$,然后在分拆$\gamma$中按照从左向右的顺序,将分部量1和其右边相邻的所有分部量2相加,产生的和作为新的分部量,这样就得到n的左、右两端分部量都是1的奇有序分拆.反之,对于n的左、右两端分部量都是1的任意一个奇有序分拆,将大于1的奇分部量分拆成"1,2,2,…,2"的形式,然后将左端的两个相邻的分部量"1,1"相加,得到的2作为新的分部量,就得到情形(a)中的分拆.

对于情形(b)中的任意一个分拆$\delta=(2,a_2,\cdots,a_{k-1},2)$,首先将右端的分部量2分拆成"1,1",并把其中一个1放在分拆的左端,得到分拆$\eta=(1,2,a_2,\cdots,a_{k-1},1)$,然后在分拆$\eta$中按照从左向右的顺序把分部量1和它右边相邻的所有分部量2相加,产生的和作为新的分部量,这样就得到n的左端分部量大于1,右端分部量是1的奇有序分拆.反之,对于n的左端分部量大于1,右端分部量是1的任意一个奇有序分拆,首先将大于1的奇分部量分拆成"1,2,2,…,2"的形式,然后将左端的分部量1加到右端的分部量1上得到的和2作为右端的分部量.这样就得到了情形(b)中的分拆.

两类分拆之间是一一对应的.

□

下面给出一个例子来说明定理9中的对应关系.

例3 设$n=6$,则6的首、末两端分部量至少有一个是2的1-2有序分拆有下面8个:

(2,2,2),(2,1,1,2),(2,2,1,1),(1,1,2,2),
(1,1,1,1,2),(2,1,1,1,1),(2,1,2,1),
(1,2,1,2)

与6的以下8个奇有序分拆一一对应:

(5,1),(3,1,1,1),(1,3,1,1),(1,5),
(1,1,1,3),(1,1,1,1,1,1),(1,1,3,1),
(3,3)

类似地,由定理4、定理1和定理3得到下面的恒等式.

定理10 正整数n的首、末两端分部量至少有一个是2的1-2有序分拆数等于$n-1$的1-2有序分拆数.

证明 对于正整数n的首、末两端分部量至少有一个是2的任意一个1-2有序分拆$\delta=(r_1,r_2,\cdots,r_t)$,若$r_t=2$,则用$r_t-1=1$替换$r_t$,就得到$n-1$的右端分部量是1的相应分拆.若$r_t=1$,则$r_1=2$,求$\delta$的反分拆$\delta'=(r_t,\cdots,r_2,r_1)$,然后删掉$\delta'$左端的分部量$r_t$,就得到$n-1$的右端分部量是2的相应分拆.

反之,对于$n-1$的任意一个1-2有序分拆$\sigma=(c_1,c_2,\cdots,c_k)$,若$c_k=1$,则用$c_k+1=2$替换$c_k$,就得到$n$的右端分部量是2的1-2有序分拆;若$c_k=2$,先在$\sigma$的左端添上分部量1,得到分拆$\tau=(1,c_1,c_2,\cdots,c_k)$,再求$\tau$的反分拆$\tau'$,则$\tau'$就是$n$的右端分部量是1,左端分部量是2的1-2有序分拆.

故两类分拆之间一一对应.

□

定理11 正整数n的首、末两端分部量至少有一个是2的1-2有序分拆数等于$n+1$的分部量大于1的有序分拆数.

证明　对于正整数 n 的首、末两端分部量至少有一个是 2 的任意一个 1-2 有序分拆 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_t)$，若 $a_1=1$，此时 $a_t=2$，则在 α 的右端添分部量 1，得到分拆 $\pi=(a_1, a_2, \cdots, a_t, 1)$ 就是 $n+1$ 的两端分部量都是 1，且右端只有一个 1 的 1-2 有序分拆. 接下来，求 π 的共轭分拆 $\bar{\pi}$，则 $\bar{\pi}$ 就是 $n+1$ 的分部量大于 1，且右端分部量是 2 的有序分拆. 若 $a_1=2$，首先把分部量 $a_1=2$ 分拆成"1，1"，并把一个 1 放在右端，得到分拆 $\rho=(1, a_2, \cdots, a_t, 1)$，然后在 ρ 的右端添分部量 1，得分拆 $\delta=(1, a_2, \cdots, a_t, 1, 1)$ 就是 $n+1$ 的两端分部量都是 1，且右端至少有两个 1 的 1-2 有序分拆. 接下来，求 δ 的共轭分拆 $\bar{\delta}$，则 $\bar{\delta}$ 就是 $n+1$ 的分部量大于 1，且右端分部量大于 2 的有序分拆.

反之，对于 $n+1$ 的任意一个分部量大于 1 的有序分拆 $\sigma=(c_1, c_2, \cdots, c_s)$，首先求 σ 的共轭分拆 $\bar{\sigma}=(b_1, b_2, \cdots, b_t)$ 就是 $n+1$ 的两端分部量都是 1 的 1-2 有序分拆，然后删掉 $\bar{\sigma}$ 的右端分部量 1，得到分拆 $\tau=(b_1, b_2, \cdots, b_{t-1})$ 就是 n 的左端分部量是 1 的 1-2 有序分拆. 在分拆 τ 中，若 $b_{t-1}=1$，就将 $b_{t-1}=1$ 加到左端的分部量 b_1 上，得到的 2 作为左端新的分部量，就得到 n 的左端分部量是 2 的 1-2 有序分拆；若 $b_{t-1}=2$，则分拆 τ 就是 n 的右端分部量是 2 的 1-2 有序分拆.

故两类分拆之间一一对应.

□

由定理 4 和定理 6 可得到下面的恒等式.

推论 7　正整数 n 的首、末两端分部量至少有一个是 2 的 1-2 有序分拆数等于正整数 n 的首端分部量是 1 的 1-2 有序分拆数.

证明　对于正整数 n 的首、末两端分部量至少有一个是 2 的任意一个 1-2 有序分拆 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_k)$，其中 a_1、a_k 至少有一个是 2，若 $a_k=1$，此时 $a_1=2$，则求 α 的反分拆，就得到 n 的左端分部量是 1，右端分部量是 2 的 1-2 有序分拆. 若 $a_k=2$，分两种情况：当 $a_1=2$，将 $a_1=2$ 分拆成"1，1"，并把这两个 1 分别放在左、右两端；当 $a_1=1$，此时 $a_k=2$，将 $a_k=2$ 分拆成"1，1". 于是得到 n 的左、右两端分部量是 1 的 1-2 有序分拆. 反之，对于 n 的任意一个首端分部量是 1 的 1-2 有序分拆 $\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_{t-1}, b_t)$，其中 $b_1=1$，若 $b_t=2$，求 β 的反分拆，就得到 n 的左端分部量是 2，右端分部量是 1 的 1-2 有序分拆；若 $b_t=1$，分两种情况：当 $b_{t-1}=1$，把 b_t 与 b_{t-1} 合并得到的 2 作为右端新的分部量；当 $b_{t-1}=2$，把 b_t 与左端的分部量 b_1 合并得到的 2 作为左端新的分部量. 于是得到 n 的右端分部量是 2 的 1-2 有序分拆.

□

由定理 4 和定理 7 可得到下面的恒等式.

推论 8　正整数 n 的首、末两端分部量至少有一个是 2 的 1-2 有序分拆数等于正整数 n 的末端分部量是 1 的 1-2 有序分拆数.

该推论的证明与推论 7 相同，故证明略.

下面给出推论 8 的一个例子.

例 4　设 $n=6$，则 6 的首、末两端分部量至少有一个是 2 的 1-2 有序分拆有下面 8 个：

(2,2,2)，(2,1,1,2)，(2,2,1,1)，(1,1,2,2)，(1,1,1,1,2)，(2,1,1,1,1)，(2,1,2,1)，(1,2,1,2)

与 6 的以下 8 个末端分部量是 1 的 1-2 有序分拆一一对应：

(1,2,2,1)，(1,2,1,1,1)，(2,2,1,1)，(1,1,2,1,1)，(1,1,1,1,1,1)，(2,1,1,1,1)，(2,1,2,1)，(1,1,1,2,1)

3　结　语

在整数分拆理论中，分拆恒等式的研究一直是研究热点，而关于分部量带约束条件正整数有序分拆恒等式的研究还不是非常深入. 本文主要考察了正整数的分部量是 1 或者 2 的有序分拆，尤其是正整数的首、末两端分部量是 1 或者 2 的 1-2 有序分拆，得到了这些有序分拆数与 Fibonacci 数之间的一些关系式. 进而，利用熟知的与 Fibonacci 数相关的有序分拆恒等式，得到了几个关于正整数的 1-2 有序分拆的新的有序分拆恒等式，并给出了组合双射证明. 这些结果在理论上进一步丰富了整数分拆恒等式，同时也为寻找整数分拆恒等式的组合双射证明提供了一些方法.

参考文献：

[1] MACMAHON P A. **Combinatory Analysis: Volumes 1** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[2] ANDREWS G E. **The Theory of Partitions** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

[3] ANDREWS G E, HIRSCHHORN M D, SELLERS J A. Arithmetic properties of partitions with even parts distinct [J]. **Ramanujan Journal**, 2010, **23**: 169-181.

[4] CHEN Shichao. On the number of partitions with distinct even parts [J]. **Discrete Mathematics**, 2011, **311**(12): 940-943.

[5] MUNAGI A O. Euler-type identities for integer compositions via zig-zag graphs [J]. **Integers**, 2012, **12**: A60.

[6] HEUBACH S, MANSOUR T. **Combinatorics of Compositions and Words** [M]. Boca Raton: CRC Press, 2010.

[7] MUNAGI A O. Primary classes of compositions of numbers [J]. **Annales Mathematicae et Informaticae**, 2013, **41**: 193-204.

[8] MUNAGI A O. Zig-zag graphs and partition identities of A. K. Agarwal [J]. **Annals of Combinatorics**, 2015, **19**: 557-566.

[9] MUNAGI A O, SELLERS J A. Some inplace identities for integer compositions [J]. **Quaestiones Mathematicae**, 2015, **38**(4): 535-540.

[10] GUO Yuhong. Some notes on inplace identities for compositions [J]. **Journal of Mathematical Research with Applications**, 2016, **36**(5): 515-520.

[11] 郭育红，王汝军. 与自反的 n-color 有序分拆相关的一些恒等式 [J]. 数学学报(中文版)，2016，**59**(4)：535-544.
GUO Yuhong, WANG Rujun. Some identities related to the self-inverse n-color compositions [J]. **Acta Mathematica Sinica (Chinese Series)**, 2016, **59**(4): 535-544. (in Chinese)

[12] 郭育红. 关于正整数有序分拆的两个组合双射 [J]. 纯粹数学与应用数学，2016，**32**(1)：1-5.
GUO Yuhong. Two combinatorial bijections about compositions of positive integer [J]. **Pure and Applied Mathematics**, 2016, **32** (1): 1-5. (in Chinese)

[13] 郭育红. 正整数不含分部量2有序分拆的一些恒等式 [J]. 大连理工大学学报，2018，**58**(4)：437-440.
GUO Yuhong. Some identities related to compositions of positive integers without 2′s [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2018, **58**(4): 437-440. (in Chinese)

[14] GUO Yuhong. Several identities for inverse-conjugate compositions [J]. **Journal of Mathematical Research with Applications**, 2018, **38**(5): 441-448.

[15] GUO Yuhong. Short proofs of Euler-type identities for compositions [J]. **Integers**, 2019, **19**: A23.

[16] GUO Yuhong. The inverse-conjugate compositions without 2′s [J]. **Ars Combinatoria**, 2019, **146**: 123-133.

Several identities and combinatorial proofs for 1-2 compositions

GUO Yuhong*

(School of Mathematics and Statistics, Hexi University, Zhangye 734000, China)

Abstract: Two classes of 1-2 compositions of positive integer are studied. One of them is the 1-2 compositions with parts of size 1 at the left and the right of positive integers, and the other is the 1-2 compositions with parts of size 2 at the left or the right of positive integers. Firstly, some relations between the number of these compositions and the Fibonacci numbers are obtained. And then using the well-known composition identities related to the Fibonacci numbers, several new composition identities between the number of these two classes of the compositions and the number of the compositions with parts of odd, the number of the compositions with parts of size greater than 1 and the number of the compositions with parts of size 1 or 2 are got. In addition, combinatorial bijective proofs of these identities are given.

Key words: 1-2 compositions; the part; Fibonacci number; identity; combinatorial proof

(第62卷卷终)