

Volterra 型积分微分方程 Chebyshev 谱配置法求解

方春华*, 黄超兰, 王建雨

(湖南理工学院 数学学院, 湖南 岳阳 414006)

摘要: 采用 Chebyshev 谱配置法求解 Volterra 型积分微分方程. 首先将积分微分方程改写成等价的第二类 Volterra 积分方程组, 再取 Clenshaw-Curtis 点为配置点, 然后利用 Clenshaw-Curtis 求积法则离散方程中积分项得到配置方程组, 最后给出在 L^∞ 范数空间下的误差分析, 并用数值实验验证理论分析的结果. 该方法既有谱精度, 程序又易实现.

关键词: Volterra 型积分微分方程; 第二类 Volterra 积分方程组; Chebyshev 谱配置法; Clenshaw-Curtis 求积; 谱精度

中图分类号: O241.83 **文献标识码:** A **doi:** 10.7511/dllgxb202302013

0 引言

Volterra 型积分微分方程(VIDEs)在许多科学与工程问题中有广泛的应用, 大多数情况下, 其解析解很难得到, 通常转而求其满足一定精度要求的近似解. 关于 VIDEs 解的存在性与唯一性可参考文献[1]. 当解足够光滑时, 谱方法由于其谱精度成为求解微分与积分方程时常用的一种方法, 主要有谱 Galerkin 方法、配点法及 Tau 方法. 与 Legendre 多项式有关的配点法称为 Legendre 谱配置法, 与 Chebyshev 多项式有关的配点法称为 Chebyshev 谱配置法.

2009 年, Jiang^[2] 将 VIDEs 转换成与之等价的第二类 Volterra 积分方程组, 然后用 Legendre 谱配置法实现对方程组的数值求解, 得到了较好的误差精度. 吴华等^[3] 做了进一步的研究, 首先也是将 VIDEs 转换成第二类 Volterra 积分方程组, 然后选取 Chebyshev-Gauss-Lobatto 点(即为 Chebyshev 多项式的极值点加上两个端点, 又称为 Clenshaw-Curtis 点)为配置点, 再将函数用配置点上满足插值条件的插值多项式近似代替, 得到配置方程组再计算. 两者相比较, Legendre 谱配置法虽然取得了较好的误差精度, 但 Legendre 多项式的权是隐式的, 计算时涉及矩阵特征值与

特征向量, 计算时间较长; Chebyshev 谱配置法的节点(Clenshaw-Curtis 点)是显式的, 积分权可通过快速傅里叶变换计算, 复杂度为 $O(n \log n)$. 本文将提出另一种 Chebyshev 谱配置法求解 Volterra 型积分微分方程, 与文献[3] 积分处理方式不同, 先要通过线性变换将区间转化到 $[-1, 1]$ 上, 再利用 Clenshaw-Curtis 求积公式处理积分项, 最后用插值多项式的值近似其余点上的函数值.

1 格式构造

首先, 将 VIDEs 转化成等价的第二类 Volterra 积分方程组(VIEs), 然后利用 Clenshaw-Curtis 求积法则离散方程中积分项得到配置方程组, 将未知函数在配置点上作 Lagrange 插值, 进而得到原方程的离散格式.

考虑方程

$$\begin{aligned} u'(x) &= p(x)u(x) + \int_{-1}^x k(x,s)u(s)ds + f(x), \\ x &\in [-1, 1]; \\ u(-1) &= u_{-1} \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $u(x)$ 为未知函数, $u'(x)$ 为未知函数 $u(x)$ 的一阶导数; 核函数 $k(x, s)$ 与右侧函数 $p(x)$ 、 $f(x)$ 均足够光滑. 记 $z(x) = u'(x)$, 将方程(1)转换成

收稿日期: 2022-04-02; 修回日期: 2023-01-30.

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(2022JJ30276).

作者简介: 方春华*(1979-), 女, 博士, 副教授, E-mail: fangchunhuamath@163.com; 黄超兰(1998-), 女, 硕士生, E-mail: 1348186628@qq.com; 王建雨(1995-), 男, 硕士生, E-mail: strwjy@163.com.

关于函数 $z(x)$ 的并与之等价的第二类 VIEs:

$$z(x) = f(x) + u_{-1}p(x) + p(x) \int_{-1}^x z(s)ds + \int_{-1}^x k(x,s) \left(u_{-1} + \int_{-1}^s z(\tau)d\tau \right) ds \quad (2)$$

或

$$z(x) = f_1(x) + \int_{-1}^x k_1(x,s)z(s)ds$$

其中

$$f_1(x) = f(x) + u_{-1}p(x) + u_{-1} \int_{-1}^x k(x,s)ds$$

$$k_1(x,s) = p(x) + \int_s^x k(x,\tau)d\tau$$

为了便于计算,再将方程(2)改写成如下形式:

$$u(x) = \int_{-1}^x (z(s) + p(s)u(s))ds + u_{-1} \quad (3)$$

$$z(x) = f(x) + \int_{-1}^x k(x,s)u(s)ds$$

取配置点为 Clenshaw-Curtis 点 $\left\{ x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right) \right\}_{i=0}^n$, 令方程组(3)在配置点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 恒成立, 则

$$\begin{aligned} u(x_i) &= \int_{-1}^{x_i} (z(s) + p(s)u(s))ds + u_{-1} \\ z(x_i) &= f(x_i) + \int_{-1}^{x_i} k(x_i,s)u(s)ds \end{aligned} \quad (4)$$

$$0 \leq i \leq n$$

再进行如下线性变换:

$$s(x_i, \theta) = \frac{x_i+1}{2}\theta + \frac{x_i-1}{2}, \quad \theta \in [-1, 1] \quad (5)$$

将积分区间 $[-1, x_i]$ 转换到 $[-1, 1]$, 得到

$$\begin{aligned} u(x_i) &= \frac{1+x_i}{2} \int_{-1}^1 (z(s(x_i, \theta)) + p(s(x_i, \theta))u(s(x_i, \theta)))d\theta + u_{-1} \\ z(x_i) &= f(x_i) + \frac{1+x_i}{2} \int_{-1}^1 (k(x_i, s(x_i, \theta))) \times \\ &\quad u(s(x_i, \theta)))d\theta \end{aligned}$$

然后, 利用 Clenshaw-Curtis 求积公式近似计算方程中的积分项, 其中权利用离散傅里叶变换计算^[4], 可得到

$$\begin{aligned} u(x_i) &\approx \frac{1+x_i}{2} \left(\sum_{j=0}^n z(s(x_i, \theta_j))\omega_j + \sum_{j=0}^n p(s(x_i, \theta_j))u(s(x_i, \theta_j))\omega_j \right) + u_{-1}; \\ z(x_i) &\approx f(x_i) + \frac{1+x_i}{2} \sum_{j=0}^n (k(x_i, s(x_i, \theta_j))) \times \\ &\quad u(s(x_i, \theta_j))\omega_j \end{aligned} \quad (6)$$

假设 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 与 $\{\theta_i\}_{i=0}^n$ 是同一组点, 将函数 $u(x)$ 、 $z(x)$ 在 Clenshaw-Curtis 点作 Lagrange 插值, 有

$$u(x) \approx \sum_{p=0}^n u(x_p)L_p(x) := I_n(u)$$

$$z(x) \approx \sum_{p=0}^n z(x_p)L_p(x) := I_n(z)$$

其中 $L_p(x)$ 是基于 Clenshaw-Curtis 点的 p 阶 Lagrange 插值基函数, 进而有

$$u(s(x_i, \theta)) \approx \sum_{p=0}^n u(x_p)L_p(s(x_i, \theta))$$

$$z(s(x_i, \theta)) \approx \sum_{p=0}^n z(x_p)L_p(s(x_i, \theta))$$

代入方程组(6)得

$$\begin{aligned} u(x_i) &\approx \frac{1+x_i}{2} \left(\sum_{p=0}^n z(x_p) \sum_{j=0}^n L_p(s(x_i, \theta_j))\omega_j + \sum_{p=0}^n u(x_p) \sum_{j=0}^n (p(s(x_i, \theta_j))) \times \right. \\ &\quad \left. L_p(s(x_i, \theta_j))\omega_j \right) + u_{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(x_i) &\approx f(x_i) + \frac{1+x_i}{2} \sum_{p=0}^n u(x_p) \times \\ &\quad \sum_{j=0}^n k(x_i, s(x_i, \theta_j))L_p(s(x_i, \theta_j))\omega_j \end{aligned}$$

设 u_i 、 z_i 分别为 $u(x_i)$ 和 $z(x_i)$ 的近似值, 使得方程组取等号时成立, 得到方程(1)的离散格式:

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{1+x_i}{2} \left(\sum_{p=0}^n z_p \sum_{j=0}^n L_p(s(x_i, \theta_j))\omega_j + \sum_{p=0}^n u_p \sum_{j=0}^n p(s(x_i, \theta_j))L_p(s(x_i, \theta_j))\omega_j \right) + u_{-1}; \\ z_i &= f(x_i) + \frac{1+x_i}{2} \sum_{p=0}^n u_p \sum_{j=0}^n (k(x_i, s(x_i, \theta_j))) \times \\ &\quad L_p(s(x_i, \theta_j))\omega_j \end{aligned} \quad (7)$$

记 $\mathbf{U}_n = (u_0 \ u_1 \ \cdots \ u_n)^T$, $\mathbf{Z}_n = (z_0 \ z_1 \ \cdots \ z_n)^T$, $\mathbf{F}_n = (f(x_0) \ f(x_1) \ \cdots \ f(x_n))^T$, 则方程组(7)表示成矩阵的形式如下:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{A}\mathbf{Z}_n + \mathbf{B}\mathbf{U}_n + \mathbf{U}_{-1}$$

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{C}\mathbf{U}_n$$

其中 $\mathbf{U}_{-1} = u_{-1} \times (1 \ 1 \ \cdots \ 1)^T$, 矩阵 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 中元素分别由下式确定:

$$A_{ij} = \frac{1+x_i}{2} \sum_{j=0}^n L_p(s(x_i, \theta_j))\omega_j$$

$$B_{ij} = \frac{1+x_i}{2} \sum_{j=0}^n p(s(x_i, \theta_j))L_p(s(x_i, \theta_j))\omega_j$$

$$C_{ij} = \frac{1+x_i}{2} \sum_{j=0}^n k(x_i, s(x_i, \theta_j))L_p(s(x_i, \theta_j))\omega_j$$

2 收敛性分析

在理论上分析和论证离散格式(7)的收敛性, 首先给出在定理证明时将会用到的引理.

引理 1 (插值误差估计^[5]) 假设 $u \in H^m(I)$, $m \geq 1$, 并定义 $I_n(\cdot)$ 表示基于 $(n+1)$ 个 Clenshaw-Curtis 点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的 n 阶 Lagrange 插值算子, 则有如下式子成立:

$$\|u - I_n(u)\|_{H^l(I)} \leq Cn^{l-m} \|u\|_{H^m(I)}, \quad 0 \leq l \leq 1$$

引理 2^[6] 令 $F_i(x)$ 是以 Clenshaw-Curtis 点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 为插值节点的第 i 个 Lagrange 插值基函数, 则

$$\|I_n\|_{L^\infty(-1,1)} := \max_{x \in [-1,1]} \sum_{i=0}^n |F_i(x)| = O(\log n)$$

引理 3 (Sobolev 不等式^[7]) 任意函数 $u \in H^1(a,b)$, 有如下不等式成立:

$$\|u\|_{L^\infty(a,b)} \leq \left(\frac{1}{b-a} + 2\right)^{1/2} \|u\|_{L^2(a,b)}^{1/2} \|u\|_{H^1(a,b)}^{1/2}$$

引理 4 (Gronwall 不等式^[8-9]) 如果一个非负连续函数 $E(t)$ 满足

$$E(t) \leq C_1 \int_{-1}^t E(s) ds + G(t), \quad -1 < t < 1$$

其中 $G(t)$ 为一个可积函数, 则

$$\|E\|_{L^p(I)} \leq C \|G\|_{L^p(I)}, \quad p \geq 1$$

定理 1 (Clenshaw-Curtis 求积误差) 假设 $u(x) \in H^m(I)$, $m \geq 1$, 且 $\sum_{i=0}^n \omega_i u(x_i)$ 为 $\int_{-1}^1 u(x) dx$ 在 Clenshaw-Curtis 积分法则下的近似, 则对足够大的 n , 存在与 n 无关的常数 C 使得

$$\left| \int_{-1}^1 u(x) dx - \sum_{i=0}^n \omega_i u(x_i) \right| \leq Cn^{l-m} \|u\|_{H^m(I)},$$

$$I = [-1, 1]$$

证明 因为 $\int_{-1}^1 I_n(u) dx = \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n u(x_i) L_i(x) dx = \sum_{i=0}^n u(x_i) \int_{-1}^1 L_i(x) dx = \sum_{i=0}^n u(x_i) \omega_i$, 故

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-1}^1 u(x) dx - \sum_{i=0}^n \omega_i u(x_i) \right| = \\ & \left| \int_{-1}^1 u(x) dx - \int_{-1}^1 I_n(u) dx \right| = \\ & \left| \int_{-1}^1 (u(x) - I_n(u)) dx \right| \leq \\ & \int_{-1}^1 |u(x) - I_n(u)| dx \leq \\ & 2 \|u(x) - I_n(u)\|_{H^l(I)} \end{aligned}$$

利用引理 1 得

$$\left| \int_{-1}^1 u(x) dx - \sum_{i=0}^n \omega_i u(x_i) \right| \leq Cn^{l-m} \|u\|_{H^m(I)}$$

定理 2 设 $u(x) \in H^m(I)$ ($I = [-1, 1]$) 是方程(1)的准确解, 其中 $u_n(x)$ 、 $z_n(x)$ 是通过 Chebyshev 谱配置法所得到的数值解:

$$\begin{aligned} u_n(x) &:= \sum_{i=0}^n u_i L_i(x) \\ z_n(x) &:= \sum_{i=0}^n z_i L_i(x) \end{aligned} \quad (8)$$

当 $m \geq 1$, 有

$$\|u - u_n\|_{L^\infty(I)} \leq Cn^{l-m} \|u\|_{H^m(I)} + Cn^{1/2-m} \|u\|_{H^m(I)} + Cn^{1/2-m} \|z\|_{H^m(I)}$$

证明 根据方程组(8)中记号, 有

$$\sum_{p=0}^n z_p \sum_{j=0}^n L_p(s(x_i, \theta_j)) \omega_j = \sum_{j=0}^n z_n(s(x_i, \theta_j)) \omega_j = \int_{-1}^1 z_n(s(x_i, \theta)) d\theta$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n u_p \sum_{j=0}^n k(x_i, s(x_i, \theta_j)) L_p(s(x_i, \theta_j)) \omega_j = \\ \sum_{j=0}^n k(x_i, s(x_i, \theta_j)) u_n(s(x_i, \theta_j)) \omega_j \end{aligned}$$

则方程组(7)可以写成

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{1+x_i}{2} \left(\int_{-1}^1 z_n(s(x_i, \theta)) d\theta + \right. \\ & \quad \left. \sum_{j=0}^n p(s(x_i, \theta_j)) u_n(s(x_i, \theta_j)) \omega_j \right) + u_{-1} \\ z_i &= f(x_i) + \frac{1+x_i}{2} \left(\sum_{j=0}^n (k(x_i, s(x_i, \theta_j)) \times \right. \\ & \quad \left. u_n(x_i, s(x_i, \theta_j)) \omega_j) \right) \end{aligned}$$

方程组两边同时加上一个积分项, 并移项得

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{1+x_i}{2} \left(\int_{-1}^1 z_n(s(x_i, \theta)) d\theta \right) + \\ & \quad \frac{1+x_i}{2} \left(\int_{-1}^1 p(s(x_i, \theta)) u_n(s(x_i, \theta)) d\theta \right) + \\ & \quad u_{-1} - I_1(x_i) \\ z_i &= f(x_i) + \frac{1+x_i}{2} \left(\int_{-1}^1 (k(x_i, s(x_i, \theta)) \times \right. \\ & \quad \left. u_n(s(x_i, \theta)) d\theta) - I_2(x_i) \right) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1(x_i) &= \frac{1+x_i}{2} \left(\int_{-1}^1 p(s(x_i, \theta)) u_n(s(x_i, \theta)) d\theta - \right. \\ & \quad \left. \sum_{j=0}^n p(s(x_i, \theta_j)) u_n(s(x_i, \theta_j)) \omega_j \right) \\ I_2(x_i) &= \frac{1+x_i}{2} \left(\int_{-1}^1 k(x_i, s(x_i, \theta)) u_n(s(x_i, \theta)) d\theta - \right. \\ & \quad \left. \sum_{j=0}^n k(x_i, s(x_i, \theta_j)) u_n(s(x_i, \theta_j)) \omega_j \right) \end{aligned}$$

将方程中积分项还原方程组(5)的逆过程得到

$$u_i = \int_{-1}^{x_i} z_n(s) ds + \int_{-1}^{x_i} p(s) u_n(s) ds + u_{-1} - I_1(x_i)$$

$$z_i = f(x_i) + \int_{-1}^{x_i} k(x_i, s) u_n(s) ds - I_2(x_i)$$

上式两边同乘 $L_i(x)$ 并从 0 到 n 求和得到

$$u_n(x) = I_n \left(\int_{-1}^x z_n(s) ds \right) + I_n \left(\int_{-1}^x p(s) u_n(s) ds \right) + u_{-1} - J_1(x);$$

$$z_n(x) = I_n(f(x)) + I_n \left(\int_{-1}^x k(x, s) u_n(s) ds \right) - J_2(x) \quad (9)$$

其中

$$J_i(x) = \sum_{j=0}^n I_i(x_j) L_j(x); i=1, 2$$

方程组(7)两边同乘 $L_i(x)$ 并从 0 到 n 求和可得

$$I_n u = I_n \left(\int_{-1}^x z(s) ds \right) + I_n \left(\int_{-1}^x p(s) u(s) ds \right) + u_{-1};$$

$$I_n z = I_n(f(x)) + I_n \left(\int_{-1}^x k(x, s) u_n(s) ds \right) \quad (10)$$

记 $e_u(x) = u(x) - u_n(x)$, $e_z(x) = z(x) - z_n(x)$, 联立方程组(9)和方程组(10)得

$$\begin{aligned} e_u(x) + I_n u - u(x) &= I_n \left(\int_{-1}^x e_z(s) ds \right) + \\ &I_n \left(\int_{-1}^x p(s) e_u(s) ds \right) + J_1(x) \\ e_z(x) + I_n z - z(x) &= I_n \left(\int_{-1}^x k(x, s) e_u(s) ds \right) + \\ &J_2(x) \end{aligned}$$

化简得

$$\begin{aligned} e_u(x) &= \int_{-1}^x e_z(s) ds + \int_{-1}^x p(s) e_u(s) ds + \\ &J_1(x) + J_3(x) + J_4(x) + J_5(x); \\ e_z(x) &= \int_{-1}^x k(x, s) e_u(s) ds + J_2(x) + \\ &J_6(x) + J_7(x) \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$J_3(x) = u(x) - I_n u$$

$$J_6(x) = z(x) - I_n z$$

$$J_4(x) = I_n \left(\int_{-1}^x e_z(s) ds \right) - \int_{-1}^x e_z(s) ds$$

$$J_5(x) = I_n \left(\int_{-1}^x p(s) e_u(s) ds \right) - \int_{-1}^x p(s) e_u(s) ds$$

$$J_7(x) = I_n \left(\int_{-1}^x k(x, s) e_u(s) ds \right) - \int_{-1}^x k(x, s) e_u(s) ds$$

由方程组(11)得

$$e_u(x) = \int_{-1}^x \left(\int_{-1}^s k(s, \tau) e_u(\tau) d\tau \right) ds +$$

$$\int_{-1}^x p(s) e_u(s) ds + J^*(x) =$$

$$\int_{-1}^x \left(\int_s^x k(\tau, s) e_u(\tau) d\tau + p(s) \right) ds + J^*(x)$$

其中

$$J^*(x) = \int_{-1}^x (J_2(s) + J_6(s) + J_7(s)) ds + J_1(x) + J_3(x) + J_4(x) + J_5(x)$$

进而有

$$\begin{aligned} |e_u(x)| &\leq \int_{-1}^x \left(\int_{-1}^1 |k(\tau, s)| d\tau + \right. \\ &\left. |p(s)| \right) |e_u(s)| ds + |J^*(x)| \leq \\ &2 \left(\max_{(x,s) \in I \times I} |k(x, s)| + \max_{s \in I} |p(s)| \right) \times \\ &\int_{-1}^x |e_u(s)| ds + |J^*(x)| \leq \\ &C \int_{-1}^x |e_u(s)| ds + |J^*(x)| \end{aligned}$$

由引理 4 得

$$\|e_u(x)\|_{L^\infty(I)} \leq C \|J^*(x)\|_{L^\infty(I)} \leq C \sum_{i=0}^7 \|J_i(x)\|_{L^\infty(I)}$$

下面将逐个分析 $J_i(x) (i=1, 2, \dots, 7)$ 在 L^∞ 范数空间的误差. 首先, 应用定理 1 对 $I_1(x)$ 进行讨论:

$$\begin{aligned} |I_1(x)| &\leq C n^{l-m} \|p(s(x, \theta)) u_n(s(x, \theta))\|_{H^m(I)} \leq \\ &C n^{l-m} \max_{s \in I} |p(s)| \|u_n\|_{H^m(I)} \leq \\ &C n^{l-m} \|u_n\|_{H^m(I)} \end{aligned}$$

类似可得到

$$|I_2(x)| \leq C n^{l-m} \|u_n\|_{H^m(I)}$$

再利用引理 2 对 $J_1(x)$ 进行估计:

$$\begin{aligned} \|J_1(x)\|_{L^\infty(I)} &= \|I_n(I_1)\|_{L^\infty(I)} \leq \\ &\|I_n\|_{L^\infty(I)} \|I_1\|_{L^\infty(I)} \leq \\ &C n^{l-m} (\log n) (\|u\|_{H^m(I)} + \|e_u\|_{L^\infty(I)}) \end{aligned} \quad (12)$$

类似可得到

$$\|J_2(x)\|_{L^\infty(I)} \leq C n^{l-m} (\log n) (\|u\|_{H^m(I)} + \|e_u\|_{L^\infty(I)}) \quad (13)$$

由引理 1 和引理 3 有

$$\begin{aligned} \|J_3(x)\|_{L^\infty(I)} &\leq C \|J_3(x)\|_{L^2(I)}^{1/2} \|J_3(x)\|_{H^1(I)}^{1/2} \leq \\ &(C n^{-m} \|u\|_{H^m(I)} C n^{1-m} \|u\|_{H^m(I)})^{1/2} \leq \\ &C n^{1/2-m} \|u\|_{H^m(I)} \end{aligned} \quad (14)$$

同理有

$$\|J_6(x)\|_{L^\infty(I)} \leq C n^{1/2-m} \|z\|_{H^m(I)} \quad (15)$$

当取 $m=1$ 时有

$$\|J_5(x)\|_{L^\infty(I)} \leq C n^{-1/2} \left\| \int_{-1}^x p(s) e_u(s) ds \right\|_{H^1(I)} \leq$$

$$\begin{aligned}
& Cn^{-1/2} \left\| p(x)e_u(x) + \right. \\
& \left. \int_{-1}^x p_x(s)e_u(s)ds \right\|_{L^2(I)} \leq \\
& Cn^{-1/2} (\max_{x \in I} |p(x)| + \\
& \max_{x \in I} \|\partial_x p(x)\|_{L^2(I)}) \|e_u(x)\|_{L^2(I)} \leq \\
& Cn^{-1/2} \|e_u(x)\|_{L^2(I)} \leq \\
& Cn^{-1/2} \|e_u(x)\|_{L^\infty(I)} \quad (16)
\end{aligned}$$

同理有

$$\|J_4(x)\|_{L^\infty(I)} \leq Cn^{-1/2} \|e_u(x)\|_{L^\infty(I)} \quad (17)$$

$$\|J_7(x)\|_{L^\infty(I)} \leq Cn^{-1/2} \|e_u(x)\|_{L^\infty(I)} \quad (18)$$

联立式(12)至式(18)得

$$\begin{aligned}
\|e_u(x)\|_{L^\infty(I)} & \leq C_1 n^{l-m} (\log n) (\|u\|_{H^m(I)} + \\
& \|e_u\|_{L^\infty(I)}) + C_2 n^{1/2-m} \|u\|_{H^m(I)} + \\
& C_3 n^{1/2-m} \|z\|_{H^m(I)} + \\
& C_4 n^{-1/2} \|e_u(x)\|_{L^\infty(I)}
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
\|e_u(x)\|_{L^\infty(I)} & \leq Cn^{l-m} (\log n) \|u\|_{H^m(I)} + \\
& Cn^{1/2-m} \|u\|_{H^m(I)} + Cn^{1/2-m} \|z\|_{H^m(I)}
\end{aligned}$$

3 数值实例

为了便于比较,选用与文献[2-3]一样的数值例子.

例1 计算 Volterra 型积分微分方程(1),其中 $k(x, s) = e^{xs}$, $p(x) = \sin x$, $f(x) = 4e^{4x} - e^{4x} \sin x + \frac{1}{x+4}(e^{-(x+4)} - e^{x(x+4)})$, 此时精确解为 $u = e^{4x}$.

利用本文算法计算,将所得数值解与精确解进行对比,结果如图1所示.

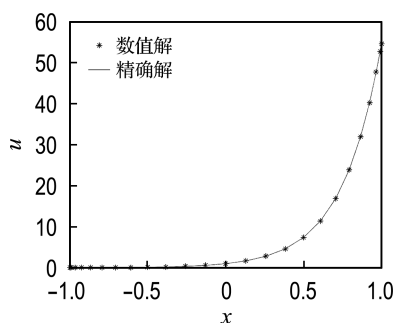


图1 数值解与精确解对比

Fig. 1 Comparison of numerical solution and exact solution

取不同的节点数 n 时,对应在 L^∞ 范数空间的数值误差 e 如图2所示.

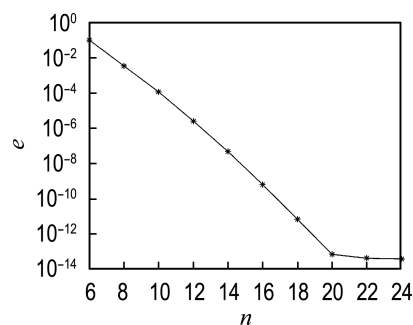


图2 L^∞ 范数空间内数值误差

Fig. 2 Numerical error in L^∞ norm space

从图1中可看出数值解与精确解拟合很好;从图2中可以看出,随着节点数增加,数值误差呈指数衰减,达到了预期的谱精度.

将本文算法结果与文献[2-3]中数值结果进行对比,结果见表1.

表1 无穷范数空间内数值误差对比

Tab. 1 Comparison of numerical errors in infinite norm space

n	计算误差		
	本文算法	文献[2]	文献[3]
6	1.02×10^{-1}	2.77×10^{-2}	6.13×10^{-1}
8	3.50×10^{-3}	1.82×10^{-3}	2.89×10^{-2}
10	1.16×10^{-4}	3.69×10^{-4}	8.16×10^{-4}
12	2.59×10^{-6}	8.81×10^{-6}	1.97×10^{-5}
14	4.84×10^{-8}	1.60×10^{-8}	3.38×10^{-7}
16	6.49×10^{-10}	2.22×10^{-10}	4.83×10^{-9}
18	7.01×10^{-12}	2.36×10^{-12}	5.37×10^{-11}
20	9.23×10^{-14}	4.97×10^{-14}	4.99×10^{-13}

从表1中可见,本文 Chebyshev 谱配置法比文献[3]中方法的收敛结果稍好,与文献[2]中方法达到相同的收敛精度,文献[2]中采用带 Legendre 权的 Gauss 求积公式,而本文采用 Clenshaw-Curtis 求积公式,其 Chebyshev 权可通过离散傅里叶变换计算,当节点较多时,计算时间可缩短,见表2.

表2 Legendre 权与 Chebyshev 权的计算时间

Tab. 2 Calculation time of Legendre weight and

Chebyshev weight

n	计算时间/s	
	Legendre 权	Chebyshev 权
10	0.005 901	0.000 464
50	0.001 721	0.000 300
100	0.001 714	0.000 323
1 000	0.012 632	0.000 296

4 结 语

本文利用 Chebyshev 谱配置法求解第二类 Volterra 积分微分方程, 首先将方程转化为第二类 Volterra 积分方程组, 然后令方程组在 Clenshaw-Curtis 点上成立, 再利用线性变换将区间转化为 $[-1, 1]$, 用 Clenshaw-Curtis 求积公式计算积分得到配置方程组, 并给出了误差分析, 数值算例验证了其有效性. 下一步的工作将推广到带高振荡核的情形.

参考文献:

- [1] BRUNNER H. *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [2] JIANG Yingjun. On spectral methods for Volterra-type integro-differential equations [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, **230**(2): 333-340.
- [3] 吴 华, 张 珏. Chebyshev 配置点法解 Volterra 型积分微分方程 [J]. *上海大学学报(自然科学版)*, 2011, **17**(2): 182-188.
WU Hua, ZHANG Jue. Chebyshev-collocation spectral method for Volterra type integro-differential equations [J]. *Journal of Shanghai University (Natural Science)*, 2011, **17**(2): 182-188. (in Chinese)
- [4] JOERG W. Fast construction of the Fejér and Clenshaw-Curtis quadrature rules [J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2006, **46**(1): 195-202.
- [5] MA Heping. Chebyshev-Legendre super spectral viscosity method for nonlinear conservation laws [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1998, **35**(3): 893-908.
- [6] MASTROIANNI G, OCCORSIO D. Optimal systems of nodes for Lagrange interpolation on bounded intervals [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2001, **134**(1): 325-341.
- [7] CANUTO C, HUSSAINI M Y, QUARTERONI A, *et al.* *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [8] TANG Tao, XU Xiang, CHENG Jin. On spectral methods for Volterra integral equations and the convergence analysis [J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2008, **26**(6): 825-837.
- [9] HENRY D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

Volterra type integral-differential equations solution by Chebyshev spectral collocation method

FANG Chunhua*, HUANG Chaolan, WANG Jianyu

(School of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China)

Abstract: The Chebyshev spectral collocation method is proposed to solve Volterra type integral-differential equations. Firstly, the integral-differential equation is rewritten into an equivalent system of Volterra integral equations of the second type, and Clenshaw-Curtis point is taken as the collocation point, then Clenshaw-Curtis quadrature rule is used to discretize the integral term in the equation to obtain the collocation equations, and finally the error analysis is conducted in L^∞ norm space and numerical examples are presented to verify the theoretical results. The method has spectral accuracy and is easy to implement.

Key words: Volterra type integral-differential equation; Volterra integral equations of the second kind; Chebyshev spectral collocation method; Clenshaw-Curtis quadrature; spectral accuracy